

Е.А. Требеников

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
ПРОБЛЕМЫ
ГОМОГРАФИЧЕСКОЙ
ДИНАМИКИ**

МАКС Пресс
Москва
2010

Рецензенты:

профессор В.В. Дикусар, профессор Ю.А. Рябов.

Гребеников Е.А. Математические проблемы
гомографической динамики

Автор: Гребеников Евгений Александрович, д.ф.м.н., профессор, лауреат Государственной Премии СССР и Премии СМ СССР, именем «Гребеников» названа малая планета Солнечной системы. Главный научный сотрудник Вычислительного Центра РАН им. А.А. Дородницына.

ISBN.....

Монография посвящена аналитическим и качественным исследованиям новых моделей теоретической космической динамики – ограниченных проблем многих тел, являющихся математическим обобщением известной проблемы динамики – ограниченной проблемы трех тел, впервые рассмотренной Карлом Якоби.

Методами компьютерной алгебры доказано существование нового семейства стационарных решений в ньютоновой проблеме многих ($n > 3$) тел, каждое из которых генерирует новую динамическую модель – ограниченную проблему многих тел.

На основе теории условно-периодических решений, определенных на многомерных торах (*КАМ-теории*), исследована проблема ляпуновской устойчивости стационарных решений ограниченных проблем $n > 3$ тел.

Монография может оказаться полезной для студентов и аспирантов математических и астрономических специальностей, а также для научных работников, работающих в области теоретической и прикладной космической динамики. Она может быть использована в университетских специальных курсах по качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, гамильтоновой динамике и компьютерной математике.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
Глава 1. Стационарные решения дифференциальных уравнений ньютоновой проблемы n тел	21
п.1.1. Определение стационарных решений – положений равновесия обыкновенных дифференциальных уравнений.....	22
п.1.2. Дифференциальные уравнения ньютоновой проблемы многих тел.....	24
п.1.3. Необходимые и достаточные условия существования центральных конфигураций по Винтнеру	27
п.1.4. Новые классы центральных конфигураций	33
п.1.5. Основная система алгебраических уравнений для определения координат стационарных решений – положений равновесия.....	40
п.1.6. Общий анализ алгебраической системы уравнений, определяющей стационарные решения.....	47
п.1.7. Теоремы существования стационарных решений.....	50
п.1.8. Определение координат положений равновесия для конкретных значений параметра n	54
п.1.9. Угловая скорость вращения правильного гравитирующего многоугольника вокруг своего центра.....	63
п.1.10. Стационарные решения проблемы трех тел	65
п.1.11. Стационарные решения проблемы четырех тел.....	70
п.1.12. Стационарные решения проблемы пяти тел.....	74
п.1.13. Стационарные решения проблемы шести тел	77
п.1.14. Стационарные решения проблемы семи тел	80
п.1.15. Стационарные решения проблемы восьми тел	82
п.1.16. Стационарные решения проблемы девяти тел	87
п.1.17. Стационарные решения в проблеме 10-ти тел	99
п.1.18. Стационарные решения в проблеме одиннадцати тел.....	102
п.1.19. Стационарные решения в ньютоновой проблеме 12-ти тел.....	104
п.1.20. Стационарные решения в ньютоновой проблеме многих тел с количеством компонент, большим двенадцати	110
п.1.21. Краткое заключение.....	115
Глава 2. Ограниченные ньютоновы проблемы многих тел	116
п.2.1. Проблема корректности вывода дифференциальных уравнений ограниченной проблемы трех тел	116

п.2.2. Комментарии к ограниченной проблеме трех тел.....	124
п.2.3. Новые динамические модели космической динамики – ограниченные проблемы с произвольным числом компонент	129
п.2.4. Ограниченные проблемы четырех тел	134
п.2.5. Ограниченные проблемы пяти тел	147
п.2.6. Ограниченные проблемы шести тел.....	152
п.2.7. Ограниченные проблемы семи тел.....	156
п.2.8. Ограниченные проблемы восьми тел.....	158
п.2.9. Ограниченные проблемы девяти тел.....	160
п.2.10. Ограниченные проблемы десяти тел.....	162
п.2.11. Ограниченные проблемы одиннадцати тел	168
п.2.12. Ограниченные проблемы двенадцати тел.....	169
п.2.13. Краткое заключение.....	171
Глава 3. Проблема устойчивости гомографических решений ограниченных ньютоновых проблем	172
п.3.1. Общие соображения.....	172
п.3.2. Основные определения устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений	176
п.3.3. Теорема об устойчивости решений по первому приближению	179
п.3.4. Основное свойство симплектических матриц	181
п.3.5. Теоремы Лагранжа-Лапласа, Пуассона, Арнольда	185
п.3.6. Проблема устойчивости планетных систем в «до компьютерный период»	189
п.3.7. Устойчивость по Ляпунову треугольника Лагранжа.....	195
п.3.8. Теорема Арнольда-Мозера.....	199
п.3.9. Общая схема исследования устойчивости по Ляпунову стационарных решений ограниченных проблем	201
п.3.10. Описание общего алгоритма нормализации гамильтониана в ограниченной проблеме 10-ти тел.....	234
п.3.11. Программы, используемые в методе нормализации гамильтонианов по Биркгофу	241
п.3.12. Краткое заключение.....	245
Литература	246

ВВЕДЕНИЕ

Целью нашей монографии является знакомство читателей, интересующихся *математическими проблемами космической динамики*, с новыми методами и результатами, полученными в последние годы специалистами, представляющими различные страны.

Хорошо известно, что в последние десятилетия произошли существенные изменения в технологиях конструирования новых вычислительных средств и в развитии новой компьютерной математики. Это привело к существенному расширению диапазона научных дисциплин, в которых применение компьютерной математики стало основным инструментом исследования.

Инженерный аспект этой проблемы состоит в том, что параллельно с созданием все более и более мощных суперкомпьютеров, производящих вычисления со скоростью в миллиарды арифметических операций в секунду и находящихся, как правило, на «попечении» и в распоряжении государственных ведомств, появились персональные компьютеры – несравненное средство для профессиональных исследователей и прикладных математиков, решающих важные, но не имеющие «вселенский» характер задачи, и, конечно, для любознательных людей любого возраста, не представляющих себе свою работу и даже отдых без ежедневного использования персонального компьютера.

Естественно, параллельно с инженерно-конструкторскими разработками, развивалась и сопровождающая этот процесс «своя математика», основными компонентами которой непременно являются: новые языки программирования, новые операционные системы, новые пакеты управляющих и прикладных программ, обслуживающие конкретные области знаний или отдельные отрасли народного хозяйства.

Перефразируя выше сказанное, можно утверждать, что минимум две отличительные особенности характерны для последней четверти прошлого века с точки зрения глобальных технологий.

Первая – это появление векторных суперкомпьютеров, с одной стороны, и практически полная компьютеризация быта людей, процесса образования и обучения фактически каждого индивидуума, с другой стороны. Это стало возможным, в частности, потому, что усилиями математиков были разработаны новые методы вычислительной математики и новые языки программирования, оптимально адаптированные к специфике суперЭВМ, с одной стороны, и к специфике персональных компьютеров, с другой стороны. К последним мы относим *системы символьного (или, если угодно, «аналитического») программирования*, каковыми, например, являются *система Mathematica* [1,2], *система Maple* [3] и другие системы, в которых реализованы не только арифметические, но и алгебраические операции. Для них часто используется термин «пакеты программ».

Это обусловило появление нового, сегодня весьма распространенного термина «*компьютерные алгебры*» [4], который фактически означает такие системы программирования, «внутренняя кухня» которых оперирует не только числами в двоичной системе исчисления, *ноль-единица*, но фактически оперирует любыми символами. Именно двоичная система была положена в основу работы «арифметических процессоров» компьютеров прежних поколений.

Но сначала, предложим читателю небольшой исторический обзор развития классической динамики.

Принципы классической динамики были сформулированы Исааком Ньютоном в гениальном творении «Математические начала натуральной философии» [5], впервые изданном в 1686 году. Согласно Ньютону, в их основу положено три фундаментальных закона механики и множество положений, вытекающих из них. Позже, в трудах Лагранжа [6], Эйлера [7] и Ж. Даламбера [8], были предложены общие математические методы составления уравнений динамики, описывающих движения различных физических систем и отдельных их компонент.

В 19-м столетии, выдающийся вклад в развитие новых математических методов, используемых в проблемах динамики, принадлежит английскому математику У. Гамильтону [9], немецкому математику и механику, К. Якоби [10] и безусловно, выдающемуся ученому, французскому математику, механику и философу, А. Пуанкаре [11]. Мы упомянули здесь, в первую очередь, тех ученых, которые были первыми среди основателей самой науки – *динамики небесных тел*.

В зависимости от физических свойств объектов и сред, исследуемых методами динамики, для удобства можно конкретизировать названия различных разделов науки-механики, и это было осуществлено. Для нас привычными стали, например, словосочетания «динамика твердого тела», «динамика жидкости», «газовая динамика», «динамика небесных тел», и другие аналогичные словообразования.

Появление во второй половине двадцатого столетия искусственных спутников Земли и космических ракет, движущихся в пределах Солнечной системы, породили, естественно, новый, ныне весьма распространенный научный термин «*космическая динамика*». Это понятие завоевывает все большие позиции и можно сказать, вытесняет, классический термин «*механика небесная*», который был предложен еще Лапласом в начале 19-го века, а в русской транскрипции, вместо него привычным стал термин «*небесная механика*». Выдающиеся математики и механики – представители различных научных школ и различных стран (К. Гаусс, Дж. Максвелл, У. Леверье, Дж. Адамс, Д.М. Перовицкий, Г. Брунс, А. Пуанкаре, П. Л. Чебышев, А. М. Ляпунов и другие авторитеты) пользовались в своих исследованиях, чаще всего, научным термином «*небесная механика*».

Во второй половине 20-го столетия, благодаря выдающимся достижениям Советского Союза и Соединенных Штатов Америки в деле практического освоения околоземного космического пространства, все более распространенным становится научный термин «*космическая динамика*», заменяющий прежний научный термин «*небесная механика*», что вполне объяснимо.

Космическая динамика наших дней представляет собой *объединение*, с одной стороны, фундаментальных разделов классических точных наук – астрономии, математики и механики, а, с другой стороны, новых разнообразных технических и технологических наук, которые позволяют конструировать сложнейшие рукотворные космические объекты. Сегодня человечество имеет в своем распоряжении успешно работающий *единый комплекс*, органическими составляющими которого являются новые математические, электронно-вычислительные методы и методологии, с одной стороны, а также эффективные технические средства, помогающие создавать промышленные технологии новых поколений, в частности, и для осуществления космических полетов, с другой стороны.

Сегодня мы имеем уникальное *объединение* фундаментальных классических наук – астрономии, математики, механики и их современных разделов (прежде всего, вычислительная математика, вычислительная физика и программирование) с новыми техническими и технологическими науками (какими являются, прежде всего, вычислительная техника, электроника, микро- и нанотехнологии). Все они *вместе* позволяют создавать сложнейшие рукотворные космические объекты с самыми разнообразными свойствами и целями.

Цивилизация наших дней имеет в своем распоряжении успешно работающий *универсальный комплекс*, органическими составляющими которого являются математические методы и электронно-вычислительные системы, объединенные с эффективными техническими средствами, помогающими создавать промышленные технологии новых поколений. Если полстолетия назад электронно-вычислительные системы и комплексы использовались, прежде всего, для эффективного решения конкретных задач космонавтики, в наши дни, они применяются как для реализации процесса формулировки самих новых проблем, так и процесса получения, на другом уровне точности и разнообразия, бесценной научной информации, предоставляемой исследователю и пользователю в совершенно новых формах ее представления.

Развитие компьютерной техники, вычислительной математики, новых систем программирования и новых технических средств обработки и наглядного описания информации дают возможность создавать новые методологии и технологии для потребностей как точных наук, так и гуманитарных знаний.

Важным фактором сегодняшнего дня является появление сверхпроизводительной вычислительной техники, новых систем и языков программирования, которые существенно отличаются от прежних, ориентированных, прежде всего, *на выполнение численных процедур*.

В 50-х-70-х годах XX-го столетия широко использовались *Алгол-системы* [12], *Фортран-системы* [13,14], *Паскаль-системы* [15] и многие другие системы программирования (по самым приблизительным подсчетам, наиболее распространенных в различных странах систем программирования, было не менее ста), доминировавшие в тот период в прикладной математике, информатике, физике и технике, в частности, системы с развитой математикой для «аналитических объектов» [16,17,18,19].

Появление в 70-х-90-х годах прошлого столетия упомянутых систем программирования, *оснащенных математическими операциями не только над числами, но и над другими символьными объектами*, позволило создать такие технологии в вычислительном процессе, которые в корне изменили ситуацию.

Они трансформируют вычислительный процесс из «процесса чисто вычислительного» в «процесс преобразовательный», в «процесс символьных трансформаций».

Это свойство хорошо проявляется в тех областях Знания, в которых применяются *не только численные методы в «чистом виде», но также применяются алгебраические методы, методы замен переменных, методы преобразований, записанные в виде символьных выражений*. К таким наукам относятся, прежде всего, прикладная и вычислительная математика, информатика, космическая динамика, теоретическая физика, теория управления.

Математические идеи и новые средства программирования сегодня все шире проникают и в гуманитарные науки, заменяя традиционные методы исследования на специальные пакеты программ, опирающиеся на «новую математику и системы символьного программирования».

Основная цель нашей книги состоит в знакомстве возможно большего числа заинтересованных исследователей и учащейся молодежи, с появившимися в 80-х-90-х прошлого века «новыми аналитическими методами программирования», которые, вместе с новой вычислительной техникой, могут быть использованы для решения математических проблем космической динамики на существенно более высоком научном уровне, чем в ту эпоху, когда доминировали замечательные языки программирования Алгол, Фортран, Кобол и другие.

Проблемы движения Солнца, Земли, Луны, планет (больших и малых), спутников (естественных и искусственных) и других небесных объектов в космическом пространстве, во все века считались актуальными для человека и человеческой цивилизации, но сегодня ситуация, на наш взгляд, просто уникальна.

Один из наиболее древних разделов естествознания, *наука-динамика* и, в первую очередь, ее раздел, *динамика небесных светил*, то есть *космическая динамика*, благодаря новым технологиям и новой математике, получили в наши дни, невиданные ранее возможности для своего развития.

Трудно себе представить, как бы выглядели модели Геоцентрической Системы Мироздания, Клавдия Птолемея [20], созданной в древних веках и Гелиоцентрической Системы Николая Коперника [21] (творение средних веков), которые, уже в предшествующие исторические эпохи, были не только великими открытиями, но, можно сказать, максимально возможными научными достижениями, вытекающими из той, достаточно бедной совокупности знаний, которая была в распоряжении названных корифеев во время их физического существования на Земле.

Учитывая высказанные соображения, автор поставил перед собой задачу ознакомить заинтересованного читателя с методами и результатами одного из новых разделов космической динамики, для которого часто используется название **гомографическая динамика**.

Что означает словосочетание «гомографическая динамика»?

Для этого напомним читателю простейшую, хорошо известную задачу динамики, так называемую *задачу о малых колебаниях математического маятника*. Эта классическая проблема известна не только студентам высших технических учебных заведений, но и многим гимназистам старших классов.

Задача состоит в *определении аналитической зависимости угла φ , означающего колебания маятника вокруг положения равновесия, от времени t* (см. рис.1).

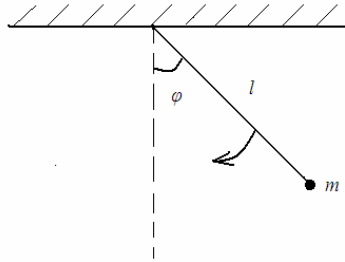


Рис. 1

Если рассматривать «общий случай», то есть считать, что угол φ может быть и малым, и большим, тогда из учебников по теории колебаний [22] известно, что колебания маятника вокруг точки подвеса, описываются достаточно простым, но, к сожалению, *нелинейным дифференциальным уравнением 2-го порядка вида* [23,24]:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2 \sin \varphi = 0 . \quad (I)$$

Величина ω , которую принято называть *частотой колебаний маятника*, или просто *частотой*, зависит от массы маятника m и его длины l .

Из математической литературы хорошо известно, что общее решение этого простейшего дифференциального уравнения нельзя выразить в так называемых «*элементарных функциях*», к которым традиционно относятся *алгебраические многочлены*, а также *тригонометрические, логарифмические и показательные функции*, то есть функции, изучаемые в средней школе.

Согласно традиции считается, что дифференциальное уравнение (I) «не разрешимо до конца», то есть невозможно написать его общее решение, используя для этого названные выше элементарные функции. Еще в 18-м столетии математики пришли к этому выводу, и по этой причине для описания его решения были разработаны и исследованы свойства специального класса функций, существенно отличающихся от названных выше «элементарных функций», это так называемые «*эллиптические функции*» [25], которые не изучаются в средней школе.

Таким образом, получается, что «школьная математика» не может справиться с такой, казалось бы, простенькой задачей как колебания простейшего маятника, колеблющегося в наиболее простом – однородном поле гравитации, в котором ускорение постоянно.

В такой ситуации, единственно правильным является подход «упрощения изучаемой модели» до такой степени, чтобы можно было «что-то» решить, если не удастся решить первоначально сформулированную задачу.

Мы последуем этому правилу и будем заранее считать колебания маятника достаточно малыми величинами, то есть будем считать угол φ заранее малой величиной. Тогда функцию $\sin \varphi$ в уравнении (I) можно заменить на величину φ (при малых углах φ величины $\sin \varphi$ и φ приблизительно равны между собой) и тогда дифференциальное уравнение (I) «превращается» в *линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка* [23,24]:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0, \quad (\text{II})$$

которое легко интегрируется, то есть решается «до конца».

Его общее решение хорошо известно и оно выражается формулой

$$\varphi(t) = C_1 \sin(\omega \cdot t + \varphi_0) + C_2 \cos(\omega \cdot t + \varphi_0). \quad (\text{III})$$

Постоянные величины C_1 и C_2 , это так называемые *произвольные постоянные интегрирования*, а величина φ_0 – значение угла φ в начальный момент времени.

Из выражения (III) видно, что функция $\varphi(t)$ является периодической функцией времени t с периодом $2\pi/\omega$.

Отсюда можно сделать весьма важное заключение. При малых отклонениях математического маятника от положения равновесия, он колеблется периодическим образом и его период колебаний равен величине $2\pi/\omega$.

Рассмотрим теперь более общую динамическую модель.

Пусть имеется в трехмерном евклидовом пространстве $Ox_1x_2x_3$ n – материальных точек $P_1, P_2, \dots, P_n$ с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$, взаимно притягивающих друг друга по закону гравитации Ньютона, то есть сила взаимного притяжения любых двух материальных точек обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.

На рис. 2 «стрелочки» изображают силы притяжения каждой точки $P_1, P_2, \dots, P_n$ остальными материальными точками.

Тогда, в соответствии с законом гравитации Ньютона, сила взаимного притяжения материальных точек P_k и P_s с массами m_k и m_s , по абсолютной величине равна

$$\left| \vec{F}_{ks} \right| = \frac{m_k m_s}{\Delta_{ks}^2}, \quad k \neq s \quad k, s = 1, 2, \dots, n \quad (\text{IV})$$

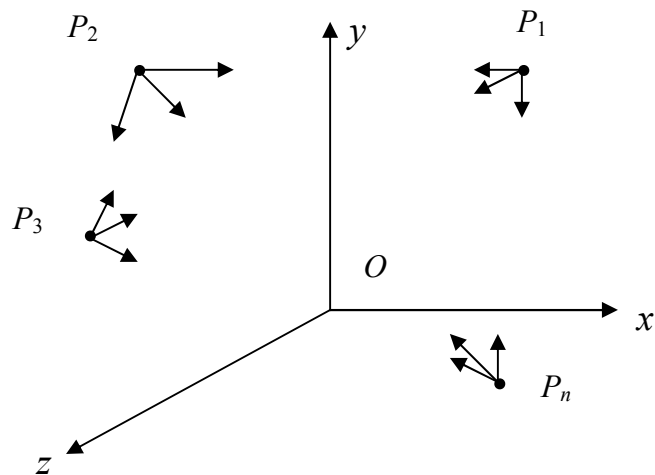


Рис. 2

Эта сила, как и всякая сила, очевидно является векторной величиной, поэтому если считать, что $\vec{F}_{ks}$ есть сила притяжения массы m_k массой m_s , то тогда сила притяжения массы m_s массой m_k будет векторная величина $\vec{F}_{sk}$ и тогда, всегда имеет место векторное тождество

$$\vec{F}_{ks} + \vec{F}_{sk} = 0. \quad (V)$$

Основная проблема динамики n взаимно притягивающих друг друга тел, $P_1, P_2, \dots, P_n$ по закону всемирного тяготения Ньютона, состоит в исследовании их движения в трехмерном пространстве, в зависимости от заданных в начальный момент времени значений координат и скоростей.

Если допустить, что в некоторый «начальный» момент времени скорости всех тел равны нулю, то тогда, начиная с этого мо-

мента, все тела будут «падать» в направлении общего центра гравитации и через некоторое время наступит гравитационный «взрыв». Если же в некоторый «начальный» момент времени поле скоростей «присутствует», тогда эволюция динамической системы может быть самой разнообразной и, можно сказать, непредсказуемой.

Поэтому для исследования подобной динамической картины необходимо решить, как говорят математики, систему дифференциальных уравнений проблемы n тел при заданных начальных условиях.

Но если задача о произвольных колебаниях одного простейшего маятника, «не поддается» решению, надеяться на получение точного решения дифференциальных уравнений, описывающих колебания в «динамической модели многих маятников», тем более не приходится.

Исключение составляет лишь проблема двух взаимно притягивающихся тел ($n=2$), точнее двух материальных точек с массами m_1 и m_2 , которая была решена еще в конце XVII-го века гениальным ученым Исааком Ньютоном [5]. Он продемонстрировал, что в случае $n=2$, так называемые дифференциальные уравнения проблемы двух тел «интегрируемы», то есть решаются «до конца» и нашел это решение. Геометрическим образом такого решения является, в частности, эллипс, точнее эллиптическая кривая и каждое из двух указанных тел движется по своей эллиптической орбите вокруг общего центра масс.

На математическом языке это означает, что Ньютон на самом деле получил существенно более общий результат: он нашел общее решение дифференциальных уравнений, описывающих проблему двух взаимно притягивающихся друг друга материальных точек с массами m_1 и m_2 при любых заданных в начальный момент положениях этих масс в пространстве и их начальных скоростей.

С точки зрения специалиста-астронома это утверждение равносильно тому, что каждая из больших планет Солнечной систе-

мы (а таких планет всего девять) в первом приближении обращаются вокруг Солнца по эллиптическим орбитам, а само Солнце, находится в одном из двух фокусов каждой эллиптической орбиты, по которой движется каждая планета Солнечной системы. Ньютон сформулировал и другие законы движения планет вокруг Солнца, которые хорошо известны современному читателю из школьного учебника по астрономии [26].

Хотим обратить внимание читателя и на то обстоятельство, что упомянутые «законы» планетных движений справедливы только для такой динамической ситуации, в которой Солнечная система рассматривается как простейшая динамическая модель, состоящая из девяти самостоятельных задач двух тел: Солнце + Меркурий, Солнце + Венера, ..., Солнце + Плутон.

В этих динамических моделях вовсе не учитывается межпланетное гравитационное влияние, то есть сами динамические модели являются весьма и весьма приближенными. Если же исследовать более точные модели (например, Солнце+Земля+Юпитер, Солнце+Юпитер+Сатурн, или другие комбинации из трех, четырех и т.д. тел), то, очевидно *законы планетных движений Ньютона для таких динамических моделей не справедливы*, так как в этих моделях силовые поля являются существенно более сложными чем в проблеме двух взаимно притягивающихся тел.

В этом случае необходимо *исследовать динамические модели, состоящие из трех, четырех и так далее, тел, которые являются проблемами наивысшей трудности*. Такие динамические модели описываются очень сложными нелинейными системами дифференциальных уравнений [27], которые до сегодняшнего дня никому не удалось решить в точной математической постановке.

Что касается определения приближенных решений движения больших планет с учетом взаимных сил притяжения, здесь, благодаря «компьютерной математике», как говорится, «все в порядке». Астрономические Ежегодники [28], изданные на разных языках, содержат весьма и весьма богатую информацию о динамике тел Солнечной системы. Можно утверждать, что Солнечная

система достаточно хорошо изучена с точки зрения практических запросов людей, поскольку имеются и таблицы и приближенные формулы, по которым можно вычислить положения в пространстве Солнца, Луны, всех больших планет, фактически с любой точностью и на достаточно большие интервалы времени, исчисляемые в тысячи и десятки тысяч лет.

Тем не менее фундаментальные проблемы познания окружающего нас Мира, его происхождение и эволюция, а следовательно, и судьба человечества, как наиболее организованной формы материи, всегда были, есть и будут актуальными проблемами для нас, существ, обитающих на планете Земля. Выражаясь математическим языком, можно сказать, что для всех нас весьма актуальной является задача о динамической эволюции в пространстве математической модели, описывающей Солнечную систему.

Такой математической моделью для Солнечной системы является знаменитая ньютонова проблема многих (точнее $n > 2$) тел, которые притягивают взаимно друг друга в соответствии с всемирным законом притяжения Ньютона [5,26,27].

Выдающиеся математики прошлого и настоящего не смогли найти точное решение этой проблемы до сегодняшнего дня, то есть, не смогли, как говорят ученые-математики, точно «проинтегрировать» систему дифференциальных уравнений, описывающих проблему $n > 2$ материальных точек, взаимно притягивающих друг друга, в соответствии с законом всемирного тяготения Ньютона.

Следует упомянуть, что простейшая проблема, которой является проблема двух тел ($n=2$), была решена еще Кеплером в начале 17-го столетия, то есть за 70 лет до выдающихся открытий Ньютона, но его решение не было строгим в математическом смысле этого слова. Позже оказалось, что Кеплер сформулировал хорошо известные три закона движений планет вокруг Солнца [26,27], которые являются следствиями общего решения проблемы двух тел, полученного Ньютоном.

Проблема, которой посвящена наша монография, состоит в определении и исследовании математических условий, которые гарантируют существование в ньютоновой проблеме $n > 2$ тел решений класса гармонических осцилляторов, т.е. наипростейших решений, которые описываются функциями вида (III).

Такие решения мы называем *гомотетичными* или *гомографичными*, так как они удовлетворяют свойствам преобразований *гомотетии*», или «преобразований *гомографии*» [29]. Согласно их определению, *гомотетия* (*гомография*) является таким линейным преобразованием евклидова пространства, при котором прямая и плоскость «переводятся» соответственно в прямую и плоскость, а углы между прямыми сохраняются.

Размеры любой конфигурации, подвергаемой гомотетичному преобразованию, могут расти или убывать, пропорционально значению так называемого *коэффициента гомотетии* χ . Если $\chi > 1$, тогда образ конфигурации будет иметь большие размеры в новом пространстве, если же $\chi < 1$, размеры «образа» в новом пространстве будут меньше размеров прообраза в исходном пространстве. Если $\chi = 1$ образ конфигурации имеет те же размеры и форму, что и прообраз, но может оказаться в другой области координатного пространства.

Наряду с исследованием проблемы существования «точных» решений в ньютоновой проблеме многих тел, весьма важной и не менее трудной является *проблема устойчивости найденных решений, которая также рассматривается в настоящем издании.*

В монографии мы используем методы и средства «компьютерной алгебры», то есть средства программирования, типичные для систем компьютерной алгебры, каковыми являются «*Mathematica*», «*Maple*» и др. Выше было сказано, что такие системы предоставляют пользователю *возможность реализации на компьютерах математических операций, применительно к символьным или аналитическим объектам (помимо операций над «числами») и, кроме того, они оснащены богатыми пакетами программ для графических изображений полученных результатов.*

Использование компьютерных алгебр позволяет также определить новые классы периодических и почти периодических решений дифференциальных уравнений космической динамики, существование которых в принципе заранее было известно, но фактически невозможно было их «выписать» в удобной форме.

Интересной иллюстрацией к этому, на наш взгляд, является исследование проблемы устойчивости Солнечной системы.

Несмотря на результаты выдающихся астрономов, математиков и физиков прошлого [6,7,11,27], а также на существенное развитие и «математизацию» самой теории устойчивости, отраженных, например, в монографиях [30–35], до сегодняшнего дня четкого ответа на математическую постановку вопроса *«устойчива или неустойчива Солнечная система и каков наиболее подходящий смысл этих понятий»* не получено.

Мы не имеем в виду реальную Солнечную систему, для которой эти проблемы трудно даже сформулировать, а подразумеваем под этим упрощенные ее математические и динамические модели. Но оказалось, что рассмотрение даже самых простых динамических моделей Солнечной системы на «бесконечных временах» с точки зрения ее устойчивости, на сегодняшний день наукой не доведено до конца.

Если же рассматривать весьма большие, но *конечные промежутки времени*, в нашей стране [36,37] и за рубежом [38,39] был выполнен ряд интересных математических исследований, касающихся динамической эволюции реальной Солнечной системы в промежутках времени порядка миллиардов лет. Из этих результатов, конечно, не вытекает «ляпуновская устойчивость» Солнечной системы, а вытекает лишь ограниченность размеров ее конфигурации, что также следует считать важным научным достижением.

На основе этих исследований можно утверждать, что *тенденция к распаду Солнечной системы в интервалах времени, в один-два миллиарда лет, не обнаруживается*. Следовательно, теоретически существует, быть может, небольшая надежда на существование «землян» – обитателей планеты Земля в интервале времени, насчитывающем миллиарды «земных» лет.

Эволюция во времени и в пространстве Солнечной системы описывается так называемыми *дифференциальными уравнениями ньютоновой динамики* [11,27,35], а в качестве координат часто используются хорошо известные, наиболее простые *декартовы системы координат* [40], или, так называемые *гамильтоновы фазовые координаты* [41-43]. Последние координаты весьма удобны при исследовании математической проблемы устойчивости решений ньютоновой проблемы многих тел, которая является одной из наиболее трудных проблем современной математики [44-46]. Некоторые ее аспекты будут рассмотрены в последней, третьей главе монографии, но здесь лишь заметим, что, *благодаря возможностям компьютерных алгебр*, удалось исследовать свойство устойчивости или неустойчивости в смысле Ляпунова некоторых новых математических моделей, типичных для теоретической космической динамики.

Таким образом, появление компьютерных алгебр, объединяющих в себя системы «символьного» и «численного» программирования и их использование на суперкомпьютерах, порождают определенную надежду на решение таких проблем естествознания, которые раньше не могли быть решены прежними техническими и программными средствами. *Проблемы возникновения и эволюции микро- и макромира* (структура и эволюция мира элементарных частиц, с одной стороны, и происхождение и эволюция Вселенной, ее «микроскопической» частички – Солнечной системы, с другой стороны) также говорят о том, что совместное использование новых интеллектуальных систем программирования и сверхмощных компьютеров дают надежду на более полное исследование проблем космической динамики завтрашнего дня.

Монография состоит из введения, трех глав и небольшого заключения.

В первой главе приведены динамические и геометрические характеристики известных сегодня точных частных решений ньютоновой проблемы n тел для значений $n=2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12$ и др.

Мы нигде, ни в одной модели, не использовали «бесконечные» выражения или бесконечные формульные разложения, то есть *ни-*

где не используются разложения в виде бесконечных рядов или бесконечных последовательностей.

Во второй главе дано обобщение понятия ограниченной проблемы 3-х тел, принадлежащее К.Якоби, на случай любого конечного числа тел ($n > 3$) и получены дифференциальные уравнения движения пассивно гравитирующей массы в ньютоновом поле гравитации, создаваемом этими телами. Изложено также математически корректное обоснование существования таких динамических моделей. Кроме того, в этой главе доказано существование одного из первых интегралов системы дифференциальных уравнений ограниченной проблемы многих тел для любого значения $n > 3$, подобного интегралу Якоби в ограниченной проблеме трех тел, и определено обобщенное понятие так называемых поверхностей Хилла [46] для любой ограниченной проблемы теоретической космической динамики.

Третья глава посвящена наиболее сложной проблеме космической динамики – проблеме устойчивости в смысле Ляпунова гомографических решений, полученных в первой и второй главах.

Для конкретных динамических моделей написаны в окончательном виде математические условия, которым должны удовлетворять динамические и геометрические параметры модели, обеспечивающие устойчивость динамической системы в первом приближении и в смысле Ляпунова.

Особое внимание уделено ограниченному в смысле Якоби [47] динамическим моделям, которым свойственна устойчивость в смысле Ляпунова. Обсуждаются также и другие аспекты проблемы устойчивости различных конфигураций и приведены конкретные оценки для параметров областей их устойчивости.

Монография завершается коротким заключением.

В процессе работы над монографией существенную помощь оказали мои коллеги Лешек Гадамский, Надежда Земцова и Ерсин Ихсанов, за что выражаю им искреннюю благодарность.

ГЛАВА 1. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЬЮТОНОВОЙ ПРОБЛЕМЫ n ТЕЛ

п.1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ – ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть дана система *автономных* обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = X(x), \quad (1.1)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ – n -мерные векторы, определенные в некоторой открытой области G_n n -мерного евклидова пространства. Пусть, кроме того, в этой области справедлива классическая теорема Коши о существовании и единственности решения [23,24].

При выполнении этих условий, очевидно, *любое решение* x^* , *определяемое как решение функционального уравнения*

$$X(x) = 0 \quad (1.2)$$

одновременно является и решением дифференциального уравнения (1.1). Действительно, в силу того, что вектор-функция $X(x)$ не зависит в явной форме от времени t , все решения функционального уравнения (1.2) являются постоянными величинами. Следовательно, их производные по времени равны нулю. Обозначим любое из этих решений через x^* .

Тогда, очевидно, с одной стороны, имеет место тождество $X(x^*) \equiv 0$, и одновременно с этим, *производная постоянного числа x^* , то есть величина $\frac{dx^*}{dt}$ также равна нулю.*

Следовательно, всегда имеет место очевидное тождество

$$\frac{dx^*}{dt} \equiv X(x^*) \quad (1.3)$$

которое, в данном случае, равносильно тождеству $0 \equiv 0$.

Из этого утверждения, как достаточно очевидное следствие, вытекает весьма простой *алгоритм поиска положений равновесия любой автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Он состоит в определении всех вещественных решений системы функциональных уравнений (1.2).

Если функция X , помимо зависимости от вектора x , зависит также от независимой переменной t , тогда функциональное уравнение

$$X(x, t) = 0, \quad (1.4)$$

естественно, *не определяет, кроме исключительных случаев, решения дифференциального уравнения (1.1).* Можно интерпретировать эту ситуацию и следующими словами:

Положения равновесия автономных динамических систем одновременно являются стационарными решениями дифференциальных уравнений, описывающих рассматриваемые выше динамические модели.

Используем эти соображения для поиска стационарных решений дифференциальных уравнений ньютоновой проблемы n тел.

Выше было сказано, что общепринятая формулировка классической теоремы существования решений обыкновенных диффе-

ренциальных уравнений обязывает исследователя предварительно написать систему обыкновенных дифференциальных уравнений в так называемой *стандартной форме Коши* [23,24], под которой подразумевается такая форма ее записи, в которой *исследуемая система уравнений содержит в левых частях уравнений только первые производные искомых функций*.

Поэтому, если учесть, что в динамике традиционно принято описывать динамические модели с помощью «ускорений», то есть *вторых производных искомых координат взаимно гравитирующих тел по времени t* , пользуясь, как правило, *трехмерным (или двумерным для “плоских” задач) конфигурационным декартовым пространством $G\xi\eta\zeta$* [49,50], в котором уравнения динамики записываются с помощью *вторых по времени производных (то есть величин-ускорений) искомых функций $\xi(t)\eta(t)\zeta(t)$* , в обязательном порядке, необходимо ввести в рассмотрение какое-либо *шестимерное (или четырехмерное для “плоских” задач) фазовое пространство, например, фазовое пространство координат и скоростей $S_6(\xi, \eta, \zeta, \frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt})$* , или *фазовое пространство координат и импульсов* [50,51], чтобы исходная система дифференциальных уравнений имела в точности вид (1.1).

П.1.2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НЬЮТОНОВОЙ ПРОБЛЕМЫ МНОГИХ ТЕЛ

Используем соображения, изложенные в предыдущем параграфе, для *поиска стационарных решений* дифференциальных уравнений ньютоновой проблем n тел.

В барицентрической декартовой инерциальной системе координат $G\xi\eta\zeta$ [27], которая является типичной системой отсчета для трехмерного конфигурационного пространства, часто используемого в космической динамике, дифференциальные урав-

нения ньютоновой проблемы n тел хорошо известны и они имеют следующий вид [27,43,46]:

$$\begin{cases} m_k \frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = \text{grad}_k U, \\ \text{grad}_k U = \frac{\partial U}{\partial \xi_k} \vec{e}_\xi + \frac{\partial U}{\partial \eta_k} \vec{e}_\eta + \frac{\partial U}{\partial \zeta_k} \vec{e}_\zeta, \\ \vec{r}_k = (\xi_k, \eta_k, \zeta_k), \quad k=1,2,\dots,n, \end{cases} \quad (1.5)$$

$\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta$ – единичные координатные векторы, а ньютонов потенциал задачи U выражается равенством

$$\begin{cases} U = \frac{f}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq k}}^n \frac{m_k m_s}{\Delta_{ks}}, \\ \Delta_{ks} = \sqrt{(\xi_s - \xi_k)^2 + (\eta_s - \eta_k)^2 + (\zeta_s - \zeta_k)^2}. \end{cases} \quad (1.6)$$

f – постоянная тяготения. Для удобства дальше всюду будем считать, что $f=1$.

В скалярной форме система (1.5) записывается в виде:

$$\begin{cases} m_k \frac{d^2 \xi_k}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \xi_k}, \\ m_k \frac{d^2 \eta_k}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \eta_k}, \\ m_k \frac{d^2 \zeta_k}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \zeta_k}, \quad k=1,2,\dots,n. \end{cases} \quad (1.7)$$

Для $n=2$ эта система дифференциальных уравнений описывает классическую *проблему двух тел* и ее *дифференциальные уравне-*

ния, как говорят математики, проинтегрированы «до конца» еще Ньютоном. Это означает, что найдено *ее общее решение* или *ее общий интеграл* [23,24], то есть определены такие двенадцать функций, аргументами которых являются координаты двух тел $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2$ и их производные по времени, $\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dot{\eta}_1, \dot{\eta}_2, \dot{\zeta}_1, \dot{\zeta}_2$, как функции времени t , которые тождественно удовлетворяют указанной системе уравнений (1.7).

Если число взаимно притягивающихся тел $n > 2$, дифференциальные уравнения (1.7) относятся к классу так называемых «*неинтегрируемых систем*», то есть до сегодняшнего дня не найдено в аналитическом виде их *общее решение*, или, что то же самое, не найден их *общий интеграл*.

По традиции, если не удастся проинтегрировать «до конца» заданную систему уравнений, актуальным становится либо поиск *ее частных решений*, либо, в крайнем случае, *поиск каких-либо приближенных решений*, используя для этого любые математические приемы и, прежде всего, аналитические, численные и качественные процедуры [27].

Следуя этой единственно правильной логике, математики и астрономы предпринимали в прошлом и реализуют сегодня различного рода попытки найти какие-либо *точные или приближенные частные решения* системы дифференциальных уравнений (1.7).

Именно в результате такого подхода и были найдены во второй половине 18-го века Леонардом Эйлером [7] и Жан-Луи Лагранжем [6] первые *гомографические решения* ньютоновой проблемы трех тел, которые ниже будут рассмотрены достаточно подробно.

Именитые классики *были первыми*, сумевшими «точно решить» ньютонову проблему трех тел, хотя они и *не нашли общего решения* дифференциальных уравнений ньютоновой проблемы трех тел, неизвестного до настоящего времени.

Исследования многих математиков показали, что *поиск и исследование свойств точных частных решений* существенно зависят от эффективности использования алгебраических и функцио-

нальных методов решения *систем нелинейных алгебраических уравнений*, которые неизбежно появляются в ньютоновой динамике при поиске любого частного решения для любого числа тел, $n > 2$.

Успех поиска точных частных решений, как будет продемонстрировано ниже, существенно зависит от того, насколько универсальными являются конструктивные *методы решения нелинейных алгебраических уравнений*, содержащих, в первую очередь, *радикалы от алгебраических полиномов*. Подобные исследования можно успешно реализовать, если использовать тот математический аппарат, который принято называть «компьютерными алгебрами» [4].

Далее мы попытаемся изложить новые результаты, относящиеся к теоретической космической динамике, которые были получены методами компьютерной алгебры различными авторами.

П.1.3. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЦЕНТРАЛЬНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ ПО ВИНТНЕРУ

Благодаря известной монографии А. Винтнера (Wintner A. «*The analytical foundations of celestial mechanics*» [53]), читатель имеет возможность ознакомиться с первыми результатами, относящимися к теории гомографических решений в «докомпьютерный период». Для заинтересованного читателя добавим, что имеется русский перевод этой монографии под названием «Аналитические основы небесной механики», осуществленный известным математиком и астрономом, профессором Ю.А.Рябовым [54].

Фундаментальным понятием этой теории является понятие *центральной конфигурации*, которое фактически было использовано еще Эйлером и Лагранжем при нахождении точных частных решений дифференциальных уравнений ньютоновой проблемы трех тел [27]. Интересно отметить, что профессор А.Винтнер, ко-

который был учеником и последователем замечательного математика первой половины XX-го столетия Дж.Биркгоффа, фактически создал математическую теорию центральных конфигураций для проблем аналитической и космической динамики в инерциальных пространствах [53,54].

Приведем ее основные положения.

Определение 1.1. Геометрическая фигура $P_1, P_2, \dots, P_n$, образованная телами $P_1, P_2, \dots, P_n$, называется центральной конфигурацией в барицентрической системе координат $G\xi\eta\zeta$, если сила ньютоновского притяжения $\vec{F}_k$, действующая на каждое тело P_k ($k=1,2,\dots,n$) с массой m_k , в данный фиксированный момент времени t_0 , пропорциональна массе m_k и вектору $\vec{\rho}_k$, определяющему положение тела P_k в этой системе координат, причем коэффициент пропорциональности σ является одним и тем же для всех тел P_k , $k=1,2,\dots,n$.

Для проблемы n тел приведенное определение можно выразить математически n векторными равенствами [53,54],

$$\vec{F}_k = \sigma \cdot m_k \vec{\rho}_k, \quad k=1,2,\dots,n. \quad (1.8)$$

Коэффициент подобия σ не зависит от индекса k и пока он здесь не определен.

Комбинируя уравнения (1.5) и равенства (1.8), Винтнер получил значение коэффициента подобия σ ,

$$\sigma = -U/I \quad (1.9)$$

а также необходимые и достаточные условия существования центральных конфигураций в ньютоновой проблеме n тел в виде системы векторных нелинейных алгебраических уравнений, которым должны удовлетворять координаты гравитирующих масс (величины ξ_k, η_k, ζ_k) следующего вида

$$\overrightarrow{\text{grad}}_k U = -\frac{m_k U}{I} \vec{r}_k, \quad k=1,2,\dots,n. \quad (1.10)$$

Кроме того, очевидной является новая форма записи первоначальных уравнений (1.5) в виде следующей «упрощенной» системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = -\frac{U}{I} \vec{r}_k \quad (1.11)$$

или

$$\frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} - \sigma \vec{r}_k = 0, \quad k=1,2,\dots,n. \quad (1.12)$$

Системе (1.12) можно дать полезную и, вместе с тем, достаточно простую геометрическую интерпретацию.

Пусть *отрицательная величина σ является к тому же и постоянной* для всех значений t из некоторого интервала $[t_0, T]$. Тогда $2n$ барицентрических декартовых координат ξ_k, η_k (для простоты будем считать, что все $\zeta_k=0$, то есть рассматриваем плоскую проблему n тел) материальных точек P_k определяются одним и тем же «осцилирующим» дифференциальным уравнением (1.12). В этом случае очевидно, что система (1.12) описывает колебания $2n$ гармонических осцилляторов, могущих отличаться друг от друга начальной фазой и начальной скоростью.

Отсюда следует, что решение системы (1.12) геометрически представляет $2n$ независимых друг от друга «математических» гармонических осцилляторов.

Следовательно, каждая из вершин многоугольника совершает колебания как гармонический осциллятор. Ее колебания, очевидно, можно описать с помощью системы двух линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_k}{dt^2} - \alpha x_k = 0 \\ \frac{d^2 y_k}{dt^2} - \sigma y_k = 0 \end{cases} \quad k=1,2,\dots,n, \quad (1.13)$$

общее решение которой хорошо известно [23]:

$$\begin{aligned} x_k &= C_k \cos(t\sqrt{-\sigma}) + D_k \sin(t\sqrt{-\sigma}) \\ y_k &= E_k \cos(t\sqrt{-\sigma}) + F_k \sin(t\sqrt{-\sigma}) \end{aligned} \quad k=1,2,\dots,n. \quad (1.14)$$

Величины C_k, D_k, E_k, F_k – произвольные постоянные интегрирования.

Таким образом, формулы (1.14) представляют собой $2n$ периодических функций с одним и тем же периодом, $T = 2\pi/\sqrt{-\sigma}$, то есть каждая вершина n -угольника, точка (x_k, y_k) , для $k=1,2,\dots,n$, совершает колебания как один и тот же гармонический осциллятор. Сам многоугольник, точнее n -угольник колеблется таким образом, что *он всегда остается правильным*.

Интегрируя уравнения (1.12) с различными начальными условиями для трехмерного случая, получаем в трехмерном пространстве те же самые $2n$ периодические функции независимой переменной t с одним и тем же периодом, $T = 2\pi/\sqrt{-\sigma}$. Следовательно, центральная конфигурация $P_1 P_2 \dots P_n$ будет представлять собой некоторый, периодически пульсирующий по закону гармонического осциллятора, пространственный многоугольник, расположенный в плоскости $z = z^*$, если величина z^* является решением уравнения $\frac{\partial U}{\partial z} = 0$.

Возвращаясь к параметру σ , отметим, что для произвольных силовых полей нахождение его аналитического выражения – весьма сложная задача.

Для ньютоновых сил притяжения и барицентрического декартова пространства величина σ была вычислена Винтнером и оказалась равной [54]:

$$\sigma = -\frac{U}{I}, \quad I = \sum_{k=1}^n m_k r_k^2, \quad (1.15)$$

где I – суммарный барицентрический момент инерции системы n тел $P_1, P_2, \dots, P_n$, а функция U , как и раньше, представляет собой ньютонов потенциал n материальных точек или однородных шаров произвольного радиуса.

Само выражение (1.15) говорит о том, что аналитическая структура коэффициента Винтнера σ является достаточно сложной нелинейной функцией барицентрических координат x_k, y_k, z_k .

Из приведенных рассуждений можно сделать заключение о том, что найдены **необходимые и достаточные условия существования центральных конфигураций проблемы n тел**, $P_1, P_2, \dots, P_n$, которые записываются в виде следующей системы векторных нелинейных алгебраических уравнений

$$\overrightarrow{\text{grad}}_k U = -\frac{m_k U}{I} \vec{r}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1.16)$$

В скалярной форме уравнения (1.16) имеют вид:

$$\begin{cases} \sum_{s=1}^n m_s \frac{\xi_s - \xi_k}{\Delta_{ks}^3} = -\frac{U \xi_k}{I}, \\ \sum_{s=1}^n m_s \frac{\eta_s - \eta_k}{\Delta_{ks}^3} = -\frac{U \eta_k}{I}, \\ \sum_{s=1}^n m_s \frac{\zeta_s - \zeta_k}{\Delta_{ks}^3} = -\frac{U \zeta_k}{I}, \\ k = 1, 2, \dots, n, s \neq k. \end{cases} \quad (1.17)$$

Будем называть уравнения (1.17) *системой уравнений Лагранжа-Винтнера* [46].

Вывод. Система уравнений Лагранжа-Винтнера (1.17) представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений, содержащую $3n$ уравнений с $3n$ неизвестными, $\xi_k, \eta_k, \zeta_k, k = 1, 2, \dots, n$, в структуру которых также входят n параметров, массы $m_k, k = 1, 2, \dots, n$.

Она описывает геометрический образ поверхности, на которой реализуются колебания n пространственных гармонических осцилляторов.

Обратим внимание читателя, на один, весьма существенный момент, связанный с корректностью реализации этих преобразований.

Если мы нашли какие-либо вещественные решения системы (1.17), далее следует изучать только те из них, которые удовлетворяют «условиям барицентричности»

$$\sum_{k=1}^n m_k \xi_k = \sum_{k=1}^n m_k \eta_k = \sum_{k=1}^n m_k \zeta_k = 0. \quad (1.18)$$

Подчеркнем, что для значений $n=2,3$ известны все стационарные решения системы (1.14), т.е. известны все барицентрические центральные конфигурации – положения равновесия ньютоновой проблемы двух и трех тел.

Для $n=2$, в соответствующей вращающейся барицентрической системе координат, центральная конфигурация проблемы 2-х тел представляет собой неподвижный прямолинейный отрезок P_1P_2 длины $2a$, в концах которого располагаются массы m_1 и m_2 . Если рассматривать эту центральную конфигурацию в инерциальной декартовой системе координат $Gxuz$ «без вращения», названный отрезок будет вращаться вокруг центра масс G в плоскости Gxu с постоянной угловой скоростью

$$\omega^2 = (m_1 + m_2)/a^3, \quad (1.19)$$

а во вращающейся системе координат указанный отрезок, очевидно, неподвижен.

В случае проблемы трех тел ($n=3$) существуют две центральные конфигурации, упомянутые выше, коллинеарные решения Эйлера и равносторонний треугольник Лагранжа, которые будут подробно описаны далее.

Для $n \geq 4$ и любого набора положительных чисел $m_1, m_2, \dots, m_n$, общие условия разрешимости уравнений Лагранжа – Винтнера (1.17) раньше не были известны. Можно лишь напомнить конфигурацию в форме квадрата ($n = 4$), описанную в статье О. Дзюбека [55].

Важным свойством центральных конфигураций является тот факт, что ее геометрическая форма не зависит от ориентации самой барицентрической системы координат в координатном пространстве, то есть во всех инерциальных конфигурационных системах координат центральные конфигурации Лагранжа-Винтнера имеют одну и ту же геометрическую форму.

п.1.4. НОВЫЕ КЛАССЫ ЦЕНТРАЛЬНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

Иная ситуация имеет место, если исследуется проблема существования центральных конфигураций в неинерциальных системах координат.

Суть состоит в том, что в неинерциальных системах отсчета, в том числе и в декартовой неинерциальной системе координат P_0xyz , дифференциальные уравнения движения точек $P_1, P_2, \dots, P_n$ относительно точки P_0 имеют другую, чем уравнения (1.7) аналитическую форму, а именно [27,46,54]:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_k}{dt^2} = \frac{\partial R_k}{\partial x_k} - \frac{(m_0 + m_k)x_k}{r_k^3}, \\ \frac{d^2 y_k}{dt^2} = \frac{\partial R_k}{\partial y_k} - \frac{(m_0 + m_k)y_k}{r_k^3}, \\ \frac{d^2 z_k}{dt^2} = \frac{\partial R_k}{\partial z_k} - \frac{(m_0 + m_k)z_k}{r_k^3}. \end{cases} \quad (1.20)$$

Там же дано понятие центральной конфигурации для неинерциальных конфигурационных пространств.

Определение 1.2 [46]. *Центральной конфигурацией n тел $P_1, P_2, \dots, P_n$ проблемы $n+1$ тел в неинерциальной относительной декартовой системе координат P_0xyz назовем геометрическую фигуру с указанными точками в ее вершинах, координаты которых определяются из следующих функциональных уравнений:*

$$\begin{cases} \frac{\partial R_k}{\partial x_k} - \frac{(m_0 + m_k)x_k}{r_k^3} = \sigma x_k, \\ \frac{\partial R_k}{\partial y_k} - \frac{(m_0 + m_k)y_k}{r_k^3} = \sigma y_k, \\ \frac{\partial R_k}{\partial z_k} - \frac{(m_0 + m_k)z_k}{r_k^3} = \sigma z_k, \end{cases} \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (1.21)$$

В равенствах (1.21) аналитическое выражение для пертурбационной функции R_k хорошо известно [27]:

$$R_k = \sum_{\substack{s=1, \\ s \neq k}}^n m_s \left(\frac{1}{\Delta_{ks}} - \frac{x_k x_s + y_k y_s + z_k z_s}{r_s^3} \right), \quad k=1, 2, \dots, n. \quad (1.22)$$

Здесь σ – неизвестный, пока, коэффициент пропорциональности, не зависящий от индекса k . Его следует определить таким образом, чтобы имели место выписанные выше $3n$ функцио-

нальные равенства (1.21), которые, очевидно, выражают пропорциональность приведенных сил (на единицу массы в системе координат P_0xyz) координатам взаимно притягивающихся масс, m_k , $k=1,2,\dots,n$.

Вывод. Если такие соотношения имеют место, это означает, что условия (1.21) выражают необходимые и достаточные условия существования центральных конфигураций в ньютоновой проблеме n тел в неинерциальной декартовой системе координат P_0xyz .

Определим коэффициент подобия σ для случая неинерциальных систем.

Условия (1.21) могут быть записаны в виде следующих равенств:

$$\begin{cases} \sum_{s=1}^n m_s \left[\frac{x_s - x_k}{\Delta_{ks}^3} - \frac{x_s}{r_s^3} \right] - \frac{(m_0 + m_k)x_k}{r_k^3} = \sigma x_k, \\ \sum_{s=1}^n m_s \left[\frac{y_s - y_k}{\Delta_{ks}^3} - \frac{y_s}{r_s^3} \right] - \frac{(m_0 + m_k)y_k}{r_k^3} = \sigma y_k, \\ \sum_{s=1}^n m_s \left[\frac{z_s - z_k}{\Delta_{ks}^3} - \frac{z_s}{r_s^3} \right] - \frac{(m_0 + m_k)z_k}{r_k^3} = \sigma z_k. \end{cases} \quad (1.23)$$

Если умножить первое уравнение системы (1.21) на $m_k x_k$, второе – на $m_k y_k$, третье – на $m_k z_k$ и полученные выражения просуммировать по индексу k , получим, в итоге, следующее алгебраическое тождество:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n / m_k m_s \frac{x_k(x_k - x_s) + y_k(y_k - y_s) + z_k(z_k - z_s)}{\Delta_{ks}^3} - \\ & - \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n / m_k m_s \frac{x_k x_s + y_k y_s + z_k z_s}{r_s^3} - m_0 \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{r_k} = \sigma \sum_{k=1}^n m_k r_k^2. \end{aligned} \quad (1.24)$$

В суммах со «штрихом», как всегда, $s \neq k$.

Введем теперь в рассмотрение новую функцию [46],

$$\begin{aligned}
 W = & \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{m_k m_s}{\Delta_{ks}} + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n m_k m_s (x_k x_s + y_k y_s + z_k z_s) \left[\frac{1}{r_k^3} + \frac{1}{r_s^3} \right] + \\
 & + \sum_{k=1}^n \frac{(m_0 + m_k) m_k}{r_k}
 \end{aligned} \quad (1.25)$$

Функция W является однородной функцией порядка (-1) , поэтому сумма левых частей равенств (1.23), выраженная через частные производные $\frac{\partial W}{\partial x_k}, \frac{\partial W}{\partial y_k}, \frac{\partial W}{\partial z_k}$, представляет собой, в конечном счете, функцию $(-W)$, а в правой части выражения (1.24) имеем произведение коэффициента подобия σ на суммарный момент инерции I тел $P_1, P_2, \dots, P_n$ относительно P_0 . Иными словами, это означает, что

Отсюда вытекает, что фундаментальное тождество (1.24) может быть записано в виде тождества

$$W \equiv -\sigma I \quad (1.26)$$

Следовательно, для *искомой функции* σ имеем следующее аналитическое представление

$$\sigma = -\frac{W}{I} \quad (1.27)$$

Это соотношение аналогично выражению (1.15), полученному Винтером для центральных конфигураций n тел в барицентрической декартовой системе координат $G\xi\eta\zeta$.

Хотим обратить внимание читателя на одно весьма важное обстоятельство.

Хорошо известно [27,46], что в неинерциальной декартовой системе координат P_0xyz не существует единого аналитического выражения, посредством которого можно было бы описать правые части дифференциальных уравнений движения тел $P_1, P_2, \dots, P_n$, подобно тому, какое существует для дифференциальных уравнений проблемы многих тел в инерциальном декартовом пространстве $Oxyz$. Напомним, что для инерциальных систем координат – это функция U .

Вместо «общего потенциала», который «отсутствует» в такой системе отсчета, эти уравнения содержат частные производные возмущающих функций R_k . Тем не менее, равенства (1.21) и (1.22) указывают на то, что введенная нами вспомогательная функция W играет такую же роль, что и ньютонов потенциал U в барицентрической системе координат, при поиске центральных конфигураций в неинерциальной системе координат P_0xyz .

Подставляя теперь выражение (1.24) в равенства (1.22), получим следующие соотношения:

$$\begin{cases} I \left(\sum_{s=1}^n m_s \left[\frac{x_s - x_k}{\Delta_{ks}^3} - \frac{x_s}{r_s^3} \right] - \frac{(m_0 + m_k)x_k}{r_k^3} \right) = -Wx_k, \\ I \left(\sum_{s=1}^n m_s \left[\frac{y_s - y_k}{\Delta_{ks}^3} - \frac{y_s}{r_s^3} \right] - \frac{(m_0 + m_k)y_k}{r_k^3} \right) = -Wy_k, \\ I \left(\sum_{s=1}^n m_s \left[\frac{z_s - z_k}{\Delta_{ks}^3} - \frac{z_s}{r_s^3} \right] - \frac{(m_0 + m_k)z_k}{r_k^3} \right) = -Wz_k. \end{cases} \quad (1.27')$$

Эти соотношения, подобно системе (1.17), также инвариантны относительно группы ортогональных вращений. Из этого следует, что равенства (1.27') можно трактовать «как необходимые и достаточные условия существования центральных конфигураций в ньютоновой проблеме многих тел в неинерциальной системе координат P_0xyz ».

Подобно уравнениям Лагранжа-Винтнера (1.17), система (1.27') тоже состоит из $3n$ нелинейных алгебраических уравнений с $3n$ неизвестными x_k, y_k, z_k , $k=1, 2, \dots, n$ и n параметрами-массами, $m_1, m_2, \dots, m_n$, расположенными в вершинах данной центральной конфигурации.

Из приведенных рассуждений вытекает следующее правило: *если заданы массы взаимно притягивающихся тел, тогда из уравнений (1.17) или (1.27'), можно определить координаты вершин центральных конфигураций.*

И, наоборот, *если известны координаты вершин тел, составляющих конкретную центральную конфигурацию, можно определить массы точек, которые являются компонентами данной конфигурации.* Приведем теперь необходимые условия существования центральных конфигураций, впервые полученные в нашей монографии [46].

Используя систему равенств (1.17), можно получить следующую систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{s=1}^n m_s \frac{\xi_s \eta_k - \eta_s \xi_k}{\Delta_{ks}^3} = 0, \\ \sum_{s=1}^n m_s \frac{\eta_s \zeta_k - \zeta_s \eta_k}{\Delta_{ks}^3} = 0, \\ \sum_{s=1}^n m_s \frac{\xi_s \zeta_k - \zeta_k \xi_k}{\Delta_{ks}^3} = 0, \\ k = 1, 2, \dots, n; s \neq k. \end{cases} \quad (1.28)$$

Система (1.28) представляет собой один из вариантов необходимых условий существования центральных конфигураций в инерциальном пространстве $Oxyz$. Она состоит из $3n$ уравнений и отличается от системы (1.17) тем, что она является линейной и однородной формой относительно масс $m_1, m_2, \dots, m_n$. Из этого вытекает следующее полезное правило:

Если заданы координаты вершин геометрической фигуры – центральной конфигурации, тогда система алгебраических уравнений (1.28) позволяет определить значения масс $m_1, m_2, \dots, m_n$, для которых заданная центральная конфигурация существует.

Введем теперь следующие обозначения:

$$\alpha_{ks}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\xi_s \eta_k - \eta_s \xi_k}{\Delta_{ks}^3}, \quad (1.29)$$

$$A_{\xi}^{(n)} = (\alpha_{ks}(\xi, \eta, \zeta)), \quad k, s = 1, 2, \dots, n, \quad k \neq s,$$

Тогда систему (1.28) можно написать в алгебраической матричной форме

$$A_{\xi}^{(n)} m = 0, \quad (1.30)$$

где транспонированная форма вектора «неизвестных» величин m записывается, очевидно, в виде $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$.

В монографии [46] доказано, что матрица $A_{\xi}^{(n)}$ имеет четный ранг и является кососимметричной, из чего следует, что при нечетном числе n ее определитель всегда равен нулю. Таким образом имеет место следующая теорема.

Теорема. В ньютоновой проблеме нечетного числа тел $n=3, 5, 7, \dots$ всегда существуют ненулевые решения системы алгебраических уравнений (1.27) относительно масс m_k .

Аналогичное утверждение имеет место и для случая системы функциональных уравнений (1.25), которую можно интерпретировать, как необходимые условия существования центральных конфигураций в неинерциальном декартовом пространстве P_0xyz .

**п.1.5. ОСНОВНАЯ СИСТЕМА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КООРДИНАТ СТАЦИОНАРНЫХ
РЕШЕНИЙ – ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ**

Напишем теперь первоначальную систему дифференциальных уравнений (1.5) в *нормальной форме Коши* [23,24], используя для этого форму записи, содержащую только производные первого порядка искомых функций:

$$\begin{cases} \frac{d\xi_k}{dt} = u_k, & \frac{du_k}{dt} = \frac{1}{m_k} \frac{\partial U}{\partial x_k}, \\ \frac{d\eta_k}{dt} = v_k, & \frac{dv_k}{dt} = \frac{1}{m_k} \frac{\partial U}{\partial y_k}, \\ \frac{d\zeta_k}{dt} = w_k, & \frac{dw_k}{dt} = \frac{1}{m_k} \frac{\partial U}{\partial z_k}. \end{cases} \quad (1.31)$$

Мы раньше подчеркивали, что эти уравнения описывают всевозможные движения в проблеме n тел в *шестимерном фазовом пространстве* барицентрических координат и их производных, $S_6(x,y,z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt})$, используя для этого латинские буквы вместо греческих.

Если теперь следовать *общему правилу поиска равновесных решений* (или *стационарных решений*, или *положений равновесия* – эти понятия, очевидно, эквивалентны), для чего следует приравнять нулю правые части системы дифференциальных уравнений (1.31), получим следующую *систему нелинейных алгебраических уравнений*

$$\begin{cases} u_k = 0, v_k = 0, w_k = 0, \\ \frac{1}{m_k} \frac{\partial U}{\partial x_k} = 0, \frac{1}{m_k} \frac{\partial U}{\partial y_k} = 0, \frac{1}{m_k} \frac{\partial U}{\partial z_k} = 0, k = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (1.32)$$

Если система алгебраических уравнений (1.32) имела бы одно, два и т.д. вещественных решений, то тогда можно было бы утверждать, что система дифференциальных уравнений (1.31) имеет одно, два и т.д. соответствующих частных решений, *каждое* из которых является положением равновесия.

Другими словами, справедлив следующий вывод:

Любое действительное решение системы (1.32), если таковые существуют, является ее положением равновесия, или, другими словами, является стационарным решением ньютоновой проблемы n тел [27,46,58].

Следовательно, решение основной проблемы, сформулированной во Введении монографии, сводится к нахождению всех действительных решений системы (1.32).

Но оказывается, система функциональных уравнений (1.32) для любого целого значения $n > 2$ не имеет никаких вещественных решений.

Подчеркнем, что сформулированный выше отрицательный вывод относится к проблеме существования стационарных решений в инерциальных евклидовых конфигурационных или фазовых пространствах [23,27,46], в которых действуют только гравитационные ньютоновы силы.

Формальное математически строгое доказательство этого *негативного утверждения* сопровождается большими аналитическими выкладками и громоздкими преобразованиями, поэтому здесь мы его не воспроизводим, тем более, что ниже будет показано, что имеются достаточно простые и ясные соображения «в пользу» его справедливости.

Кроме того, для значения $n=2$, дифференциальные уравнения проблемы двух тел интегрируются «до конца» [27] и анализ ее общего решения также указывает на *отсутствие в проблеме 2-х тел, в абсолютном евклидовом пространстве, положений равновесия.*

Если же рассматривать проблему 2-х тел во вращающейся системе координат, оно имеет *стационарное решение* – положе-

ние равновесия, которое геометрически представляется в виде двух неподвижных точек.

Изложим эти нестрогие, но достаточно убедительные геометрические соображения.

Читателю легко представить трехмерное пространство, в котором выбрана декартова инерциальная трехмерная система координат $Oxyz$, в которой имеется *конечное*, но *«весьма богатое множество»* взаимно притягивающих друг друга материальных точек $P_1, P_2, \dots, P_N$ (см. рис. 3).

Тогда, очевидно, суммарная сила воздействия на материальные точки, расположенные «вблизи» начала координат, и суммарная сила воздействия на материальные точки, расположенные «на окраине» этой совокупности материальных гравитирующих точек, *будет в принципе различной*. В пользу этого утверждения говорят элементарные геометрические соображения, а именно: легко представить «взаимную компенсацию» действующих сил, то есть «обнуление» суммарных сил, действующих на каждую из материальных точек, которая находится «далеко внутри» конфигурации (то есть тела «достаточно близкие» к началу координат), но трудно себе представить, каким образом можно «обнулить» суммарные силы притяжения, действующие на всё более и более далекие от начала координат массы, если их число конечно и находятся на конечном расстоянии от начала координат (на рис. 3 видно, что результирующая сила, действующая на «далекую» точку P_k не может равняться нулю, в отличие от результирующей силы, действующей на «близкую» к началу координат, например, на материальную точку P_1).

Если число взаимно притягивающихся масс бесконечно, в принципе можно представить такое расположение тел в пространстве, при котором суммарная сила, действующая на каждую массу (и на «близкую, и на «далекую» от начала координат), были бы равна нулю, но, *для конечного их числа, такая ситуация не может быть в принципе реализована*.

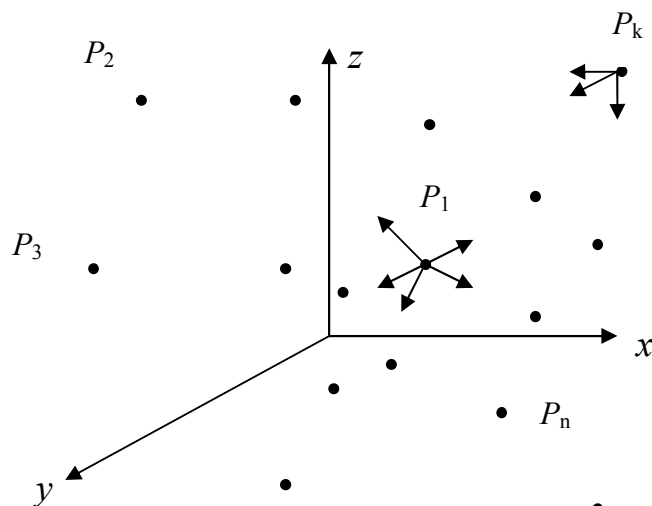


Рис. 3.

Ситуация становится принципиально иной, если, наряду с силами ньютоновой гравитации, ввести в рассмотрение другие, действующие на каждую материальную точку, силы центробежные и силы кориолисовы, которые могут, в какой-то мере, «компенсировать» действие гравитационных сил [56,57,64].

Эти силы всегда появляются в уравнениях движения, если рассматривать динамику тел во вращающихся системах координат [27]. В частности, названные силы появляются в дифференциальных уравнениях движения, если, вместо инерциальной барицентрической декартовой системы координат $Gxyz$ ввести новую, вращательную вокруг оси Gz , неинерциальную систему координат $G\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ (ось Gz совпадает с осью $G\bar{z}$, а координатная плоскость $G\bar{x}\bar{y}$ вращается в неподвижной координатной плоскости Gxy с некоторой заданной постоянной угловой скоростью ω).

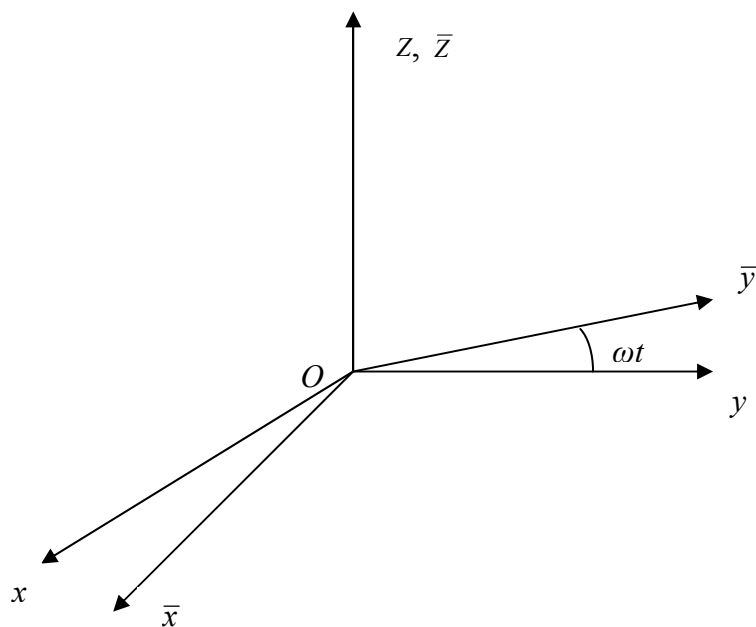


Рис. 4.

Из учебников по «теоретической механике» [56,57,63] хорошо известно, что названные новые силы являются в определенной мере «противовесом» для сил ньютоновского притяжения, поскольку они действуют в иных «векторных» направлениях, чем силы гравитации. Кроме того, при соответствующем выборе направления вращения новой вращающейся системы координат, они всегда «располагаются» в плоскости, перпендикулярной оси вращения.

Именно для таких динамических систем, в которых *действуют одновременно все перечисленные силы (силы гравитационные, силы центробежные и силы кориолисовы)*, поиск положений равновесия системы взаимно гравитирующих по Ньютону тел становится математически корректным, поэтому может увенчаться успехом.

В новой вращательной системе координат $\overline{\overline{Gxyz}}$, вместо дифференциальных уравнений движения (1.1), получаем следующую систему дифференциальных уравнений движения взаимно притягивающихся тел, написанную в новых “конфигурационных” переменных $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ [27]:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = \omega^2 \bar{x}_k + 2\omega \frac{d\bar{y}_k}{dt} + \frac{\partial U}{\partial \bar{x}_k}, \\ \frac{d^2 \bar{y}_k}{dt^2} = \omega^2 \bar{y}_k - 2\omega \frac{d\bar{x}_k}{dt} + \frac{\partial U}{\partial \bar{y}_k}, \\ \frac{d^2 \bar{z}_k}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial \bar{z}_k}. \end{cases} \quad (1.33)$$

Выражения $(\omega^2 \bar{x}_k, \omega^2 \bar{y}_k, 0)$ представляют собой *проекции центростремительной силы*, действующей на материальную точку P_k , а выражения $(+2\omega \frac{d\bar{y}_k}{dt}, -2\omega \frac{d\bar{x}_k}{dt}, 0)$ являются *проекциями кориолисовой силы* на оси вращающейся прямоугольной системы координат $\overline{\overline{Gx\bar{y}\bar{z}}}$.

Равные нулю проекции этих сил на ось аппликат Gz указывают на то, что векторы, геометрически изображающие названные силы, расположены в координатной плоскости $\overline{\overline{Gx\bar{y}}}$.

Система дифференциальных уравнений (1.33) определяет движения системы материальных точек во вращающейся «конфигурационной» системе координат, поэтому, для дальнейшего ее исследования, она должна быть заменена на равносильную ей систему дифференциальных уравнений, записанную в *переменных шестимерного вращательного фазового пространства координат и скоростей*.

Используя хорошо известное правило «канонизации» уравнений движения [42,43,57], введем сначала дополнительные переменные – единичные импульсы по хорошо известным классическим формулам механики:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = p_x, \frac{d\bar{y}}{dt} = p_y, \frac{d\bar{z}}{dt} = p_z. \quad (1.34)$$

Тогда в фазовых переменных $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} = z, p_x, p_y, p_z)$ дифференциальные уравнения движения ньютоновой проблемы n тел (1.33) в этой вращающейся с угловой скоростью ω шестимерной системе координат будут иметь *стандартную форму Коши* [23, 46]:

$$\begin{cases} \frac{dx_k}{dt} = p_{kx}, \frac{dy_k}{dt} = p_{ky}, \frac{dz_k}{dt} = p_{kz}, \\ \frac{dp_{kx}}{dt} = \omega^2 \bar{x}_k + 2\omega p_{ky} + \frac{1}{m_k} \frac{\partial U}{\partial \bar{x}_k}, \\ \frac{dp_{ky}}{dt} = \omega^2 \bar{y}_k - 2\omega p_{kx} + \frac{1}{m_k} \frac{\partial U}{\partial \bar{y}_k}, \\ \frac{dp_{kz}}{dt} = \frac{1}{m_k} \frac{\partial U}{\partial \bar{z}_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (1.35)$$

Теперь, очевидно, *стационарные решения системы* (1.35), *согласно их определению, должны быть определены как решения следующей системы функциональных уравнений*:

$$\begin{cases} p_{kx} = 0, p_{ky} = 0, p_{kz} = 0, \\ \omega^2 \bar{x}_k + 2\omega p_{ky} + \frac{1}{m_k} \frac{\partial U}{\partial \bar{x}_k} = 0, \\ \omega^2 \bar{y}_k - 2\omega p_{kx} + \frac{1}{m_k} \frac{\partial U}{\partial \bar{y}_k} = 0, \\ \frac{1}{m_k} \frac{\partial U}{\partial \bar{z}_k} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n. \end{cases} \quad (1.36)$$

Отсюда, очевидно, вытекает следующее фундаментальное утверждение:

Поиск стационарных решений – положений равновесия дифференциальных уравнений ньютоновой проблемы n тел (1.33) сводится к нахождению всех вещественных решений нелинейной системы функциональных уравнений (1.36).

п.1.6. ОБЩИЙ АНАЛИЗ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЙ СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ

Аналитическая структура системы алгебраических уравнений (1.36) весьма сложна, поэтому какие либо универсальные методы, пригодные для ее решения неизвестны.

Пока известно лишь то, что она состоит из $6n$ уравнений с таким же числом неизвестных, равным $6n$: $x_1, x_2, \dots, x_n$; $y_1, y_2, \dots, y_n$; $z_1, z_2, \dots, z_n$; $p_{1x}, p_{2x}, \dots, p_{nx}$; $p_{1y}, p_{2y}, \dots, p_{ny}$; $p_{1z}, p_{2z}, \dots, p_{nz}$. Но если проанализировать более детально ее структуру, можно убедиться в том, что ситуация не такая безнадежная, как может показаться в начале.

Во-первых, из первых $3n$ уравнений системы (1.36), определяющих проекции импульсов, сразу получаем их очевидные нулевые значения:

$$p_{1x} \equiv p_{2x} \equiv \dots \equiv p_{nx} \equiv p_{1y} \equiv p_{2y} \equiv \dots \equiv p_{ny} \equiv p_{1z} \equiv p_{2z} \equiv \dots \equiv p_{nz} \equiv 0.$$

Следовательно, из $6n$ неизвестных $3n$ неизвестных уже стали известными величинами.

Кроме того, из свойств ньютоновского потенциала любого, но конечного числа взаимно гравитирующих материальных точек, а также из «векторных» свойств кориолисовых и центробежных сил, возникающих при вращении системы координат именно вокруг оси Gz , *вытекает тождественное равенство нулю всех ко-*

ординат z_k , $k=1,2,\dots,n$, то есть, к написанным выше нулевым значениям импульсов, необходимо добавить еще следующие тождества $z_k \equiv 0$, $k=1,2,\dots,n$. (1.37)

Тождества (1.37) указывают на то обстоятельство, что *все стационарные решения* дифференциальных уравнений проблемы n -тел, если они существуют, *располагаются в координатной плоскости G_{xy}* .

Таким образом, *проблема разрешимости системы уравнений (1.36) эквивалентна проблеме разрешимости следующей нелинейной системы алгебраических уравнений*

$$\begin{cases} \omega^2 \bar{x}_k + \frac{1}{m_k} \frac{\partial U}{\partial \bar{x}_k} = 0, \\ \omega^2 \bar{y}_k + \frac{1}{m_k} \frac{\partial U}{\partial \bar{y}_k} = 0, \\ k = 1, 2, 3, \dots, n, \end{cases} \quad (1.38)$$

состоящей из $2n$ нелинейных алгебраических уравнений с $(3n+1)$ неизвестными, *если, наряду с неизвестными координатами гравитирующих точек, величинами x_k, y_k рассматривать массы гравитирующих точек, $m_1, m_2, \dots, m_n$ и угловую скорость вращения системы координат, величину ω , также в качестве неизвестных величин.*

При таком подходе можно сделать следующий вывод: **число неизвестных и число уравнений в системе (1.38) различны, поэтому проблема определения стационарных решений ньютоновой проблемы многих тел, с одной стороны, становится неопределенной (математически некорректной), а, с другой стороны, она допускает много различных аспектов и интерпретаций при ее исследовании** [64].

Рассмотрим некоторые из них.

Можно, например, считать заранее заданными величинами массы точек, $m_1, m_2, \dots, m_n$.

Тогда *нелинейная система* (1.38) будет содержать $2n$ неизвестных координат взаимно притягивающихся точек (величины x_k, y_k , $k=1, 2, \dots, n$) и еще один неизвестный параметр, величину угловой скорости ω .

Точное решение таких уравнений в аналитическом виде практически невозможно даже для малых значений числа n ($n = 4, 5, 6$), не говоря о больших его значениях, $n=7, 8, 9, 10, \dots$ и т.д. Для таких значений n проблема становится не подъемной, если не ввести *априори* какие-либо дополнительные «уточнения», например, на геометрическую конфигурацию, составленную из гравитирующих точек.

Но исследователь всегда должен иметь в виду, что при любом заданном наборе значений масс и координат гравитирующих точек, угловая скорость вращения системы координат, величина ω , *должна быть инвариантом для всех уравнений системы* (1.38).

Наиболее интересным является такой случай, при котором считаем, что заданы, или известны все координаты точек ньютоновой проблемы n тел (то есть известны геометрические параметры конфигурации – положения равновесия).

Тогда математическая задача существенно упрощается, так как система уравнений (1.38) становится *алгебраической линейной системой относительно масс m_k* , и в этом случае, очевидно, применимы методы линейной алгебры [62].

При других подходах не все так ясно, поэтому можно сказать, что в силу нелинейности алгебраических уравнений (1.38), все математические средства хороши, лишь бы они были применены математически корректно, и «породили» новый результат. К таким средствам можно отнести, в частности, две теоремы, приведенные в следующем параграфе.

п.1.7. ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ

С ростом числа n , трудности поиска положений равновесия, очевидно, возрастают, прежде всего, из-за увеличения размерности самой системы и, кроме того, в правых частях уравнений добавляются новые нелинейные слагаемые относительно искомых величин – координат новых масс.

Поэтому представляется целесообразным привести здесь формулировки двух теорем, которые были использованы многократно при нахождении положений равновесия в проблеме n тел.

Это, прежде всего, хорошо известный специалистам по теоретической космической динамике, результат парижского профессора, Б. Эльмабсута, сформулированный в виде следующей теоремы.

Теорема Эльмабсута [66]. Пусть имеется $N+1 = rp+1$ взаимно притягивающихся между собой тел $P_0, P_1, \dots, P_N$ с массами $M_0, M_1, \dots, M_N$. Пусть кроме того, тела $P_1, P_2, \dots, P_N$ образуют p правильных концентрических n -угольников с общим центром P_0 , в вершинах каждого из которых массы равны между собой ($M_1 = M_2 = \dots = M_n = m_1$, ..., $M_{n+1} = M_{n+2} = \dots = M_{2n} = m_2$, ..., $M_{N-n+1} = M_{N-n+2} = \dots = M_N = m_p$), каждый многоугольник ориентирован относительно двух соседних на угол π/n и вращается вокруг центра P_0 с угловой скоростью

$$\omega_\ell^2 = \frac{M_0}{|q_{\ell,k}|^3} + \frac{1}{q_{\ell,k}} \left\{ \sum_{\substack{1 \leq r \leq p \\ r \neq \ell}} m_r \sum_{j=1}^n \frac{q_{\ell,k} - q_{r,j}}{|q_{\ell,k} - q_{r,j}|^3} + m_\ell \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \frac{q_{\ell,k} - q_{\ell,j}}{|q_{\ell,k} - q_{\ell,j}|^3} \right\} \quad (1.39)$$

Здесь величины $q_{\ell,k} = (x_{\ell,k}, y_{\ell,k})$ – это координаты тела $P_k (k=1,2,\dots,n)$, находящегося в каждой вершине ℓ -го много-

угольника ($\ell=1,2,\dots,p$), а модули разностей координат тел с разными индексами, возведенные в 3-ю степень означают 3-ю степень декартовых расстояний между соответствующими точками («телами»), для которых хорошо известны классические соотношения

$$|q_{\ell,k} - q_{r,j}|^3 = [(x_{\ell,k} - x_{r,j})^2 + (y_{\ell,k} - y_{r,j})^2]^{3/2}.$$

Если для заданных координат $q_{\ell,k}$ существуют такие наборы значений параметров $t_1, t_2, \dots, t_p$, чтобы имели место равенства

$$\omega_1^2 = \omega_2^2 = \dots = \omega_p^2 = \omega^2, \quad (1.40)$$

тогда плоская ньютонова проблема $(N+1)$ -тел имеет точное гомографическое решение, описываемое p правильными концентрическими n -угольниками, вращающимися с одинаковой угловой скоростью ω в одном общем направлении вокруг центрального тела P_0 .

Утвердительную часть этой важной теоремы можно сформулировать и в других «словесных» формах, но мы ниже приведем такую ее формулировку, которая наиболее удобна для нашего дальнейшего изложения:

Если для заданных значений параметров $t_1, t_2, \dots, t_p$ существуют такие наборы координат $(x_{\ell,k}, y_{\ell,k})$, при которых имеют место равенства (1.40), тогда плоская ньютонова проблема $(N+1)$ -тел имеет точное гомографическое решение, описываемое p правильными n -угольниками, вращающимися с одной и той же постоянной угловой скоростью ω в одной и той же плоскости и в одном направлении вокруг тела P_0 .

Это утверждение по форме несколько отличается от формулировки ее автора, профессора Б. Эльмабсута, но по сути они эквивалентны. Мы привели эту формулировку здесь, так как довольно часто ее использовали некоторые коллеги, работающие в области теоретической космической динамики [67,71].

Второй результат – это теорема существования точных частных решений дифференциальных уравнений движения в плоской ньютоновой проблеме $(n+1)$ -тел, записанных в так называемых «переменных Нехвилла» [72], приведенная в нашей статье [73].

Эти переменные описывают пространство Нехвилла, точнее специальный четырехмерный пространственно-временной континуум [74,75], который может быть использован при формулировке проблемы существования положений равновесия дифференциальных уравнений проблемы n -тел именно в переменных Нехвилла.

Мы показали, что в «пространственно-временном континууме» Нехвилла, также существуют положения равновесия в ньютоновой проблеме многих тел, которым в евклидовом пространстве Охуз с «ньютоновым» временем t соответствуют правильные масштабно-подобно себе изменяющиеся многоугольники (n -угольники), вращающиеся с переменной угловой скоростью вокруг центральной точки P_0 с массой m_0 .

Теорема [73]. Пусть:

- 1) материальные точки $P_0, P_1, \dots, P_n$ с массами m_0 и $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$ соответственно, взаимно притягивают друг друга по закону всемирного тяготения;
- 2) в начальный момент $t=0$ точки $P_1, \dots, P_n$ образуют правильный многоугольник с центром P_0 ;
- 3) начальные скорости точек $P_1, \dots, P_n$ образуют произвольное, плоское симметричное поле скоростей относительно центра P_0 .

Тогда решение дифференциальных уравнений движения тел $P_1, \dots, P_n$ для любого значения t представляет собой правильный,

масштабно-подобно себе изменяющийся многоугольник, вращающийся с переменной угловой скоростью вокруг центра P_0 , а каждое из тел $P_1, \dots, P_n$ движется по орбите, определяемой уравнениями классической задачи двух тел, в которой массами служат некоторые редуцированные величины, однозначно зависящие от масс m_0, m_k , $k=1, 2, \dots, n$ и количества гравитирующих точек, числа n .

Такая конфигурация, очевидно, не является положением равновесия во вращающемся с постоянной угловой скоростью ω декартовом пространстве G_{xyz} , но является *равновесным решением в четырехмерном континууме Нехвилла*.

Геометрия этих динамических структур достаточно интересна. В зависимости от заданных начальных координат и скоростей *эти не изменяющиеся в пространстве Нехвилла конфигурации*, в евклидовом пространстве с абсолютным временем, представляют собой *пульсирующие, вращающиеся с переменной угловой скоростью, вокруг общего центра, плоские, регулярные многоугольники*. Существуют «непустые» множества начальных данных, при которых эти конфигурации неограниченно расширяются с монотонно уменьшающейся угловой скоростью, равной нулю на бесконечности.

Наряду с этим, существуют и такие совокупности начальных условий, при которых конфигурации будут уменьшаться, со все возрастающей угловой скоростью, в результате чего может наступить «коллапс», то есть одновременное столкновение всех n материальных точек.

Если исследовать проблему существования *масштабно изменяющихся конфигураций*, но таких, которые обладают свойством «постоянства» не в евклидовом пространстве с абсолютным ньютоновым временем t , а в четырехмерном пространственно-временном континууме Нехвилла, в этом случае, роль «времени» Нехвилла играет новое «регуляризованное время», которому в декартовом пространстве *соответствует истинная аномалия* ньютоновой проблемы двух тел v , зависящая от абсолютного ньютоновского

времени t , весьма сложным способом, посредством классического трансцендентного уравнения Кеплера [27].

В завершении этого параграфа укажем заинтересованному нашей тематикой читателю еще на один, весьма интересный научный результат, принадлежащий Ан.Ан.Гончару [76]. Названный автор разработал метод, который может быть назван *компьютерно-геометрическим*, и на его основе ему удалось получить *общее уравнение инвариантности конфигураций* для любого целого числа n , которое позволяет определить, в частности, радиальные координаты положений равновесия (величину r), как функции параметра n . Этот результат, в частности, дает возможность существенно автоматизировать процесс вычислений при решении многих проблем космической динамики.

Изложенные здесь результаты были использованы различными авторами и, естественно могут быть применены и в дальнейшем в исследовании проблемы существования положений равновесия и их устойчивости в различных вариантах ньютоновой проблемы многих тел. Они особенно полезны для случаев, когда задана заранее геометрия их конфигураций.

п.1.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КООРДИНАТ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ КОНКРЕТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРА n

Положения равновесия *ньютоновой проблемы трех тел*, как мы писали об этом выше, были найдены Эйлером и Лагранжем во второй половине 18-го века. Этот результат всегда считался выдающимся достижением математики и по этой причине ньютонова проблема многих тел стала, можно уверенно сказать, основным объектом исследований наиболее известных математиков и физиков на протяжении двух с половиной столетий.

Естественно, уровень развития математики, механики и физики той эпохи не позволял ученым эффективно исследовать сложные модели космической динамики и, в частности, динамическую

эволюцию планетных и звездных систем, но на протяжении 250-ти лет актуальность исследований космических динамических моделей никогда не подвергалась сомнению.

Сегодня все отрасли знаний имеют другие, неизмеримо более богатые возможности для решения научных проблем и исследования существенно более сложных научных моделей и явлений, чему способствуют многочисленные факторы. Среди них большую роль играют отрасли знаний, которые называются *информатикой, современной вычислительной математикой и вычислительной техникой*.

Если перенести эти соображения на проблематику, обсуждаемую в данной книге, можно сказать, что *это те же классические проблемы существования стационарных решений и их устойчивости*, но для существенно более сложных моделей космической динамики, чем ньютонова проблема 3-х тел.

Рассмотрим два примера, которые в принципе дают возможность понять, каким образом можно использовать математические методы и современные средства программирования для поиска положений равновесия при $n > 3$.

Задача №1. *Определить все положения равновесия в ньютоновой проблеме 4-х тел.*

Решение. Из общего анализа, приведенного в п.1.6, вытекает, что все положения равновесия в проблеме 4-х тел определяются системой функциональных уравнений (1.38) для конкретного значения $n=4$. Такая система в более подробной записи имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^2 \bar{x}_1 + \frac{1}{m_1} \frac{\partial U}{\partial \bar{x}_1} = 0, \\ \omega^2 \bar{y}_1 + \frac{1}{m_1} \frac{\partial U}{\partial \bar{y}_1} = 0, \\ \omega^2 \bar{x}_2 + \frac{1}{m_2} \frac{\partial U}{\partial \bar{x}_2} = 0, \\ \omega^2 \bar{y}_2 + \frac{1}{m_2} \frac{\partial U}{\partial \bar{y}_2} = 0, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \omega^2 \bar{x}_3 + \frac{1}{m_3} \frac{\partial U}{\partial \bar{x}_3} = 0, \\ \omega^2 \bar{y}_3 + \frac{1}{m_3} \frac{\partial U}{\partial \bar{y}_3} = 0, \\ \omega^2 \bar{x}_4 + \frac{1}{m_4} \frac{\partial U}{\partial \bar{x}_4} = 0, \\ \omega^2 \bar{y}_4 + \frac{1}{m_4} \frac{\partial U}{\partial \bar{y}_4} = 0, \end{array} \right. \quad (1.41)$$

Написанная система состоит из восьми нелинейных алгебраических уравнений с восьмью неизвестными – координатами гравитирующих точек, $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4$ и, кроме того, она содержит в качестве параметров четыре величины, массы m_1, m_2, m_3, m_4 и угловую скорость вращения системы координат $\overline{Gxyz}$, величину ω .

Аналитическая структура системы (1.41) такова, что к ней неприменимы известные теоремы алгебры о разрешимости алгебраических уравнений [62] и по этой причине вопрос о количестве решений системы (1.41) становится, с одной стороны, чрезвычайно сложным, а, с другой стороны, к ее решению «позволено» подходить любым способом, лишь бы не были нарушены «законы арифметики и алгебры».

В этой ситуации, предпочтительной является **следующая постановка задачи**: заранее считая заданной геометрическую конфигурацию, в вершинах которой находятся гравитирующие массы, необходимо найти значения масс, которые гарантировали бы существование заданной конфигурации.

Такой подход реализовала при исследовании ньютоновой проблемы четырех тел Н.И.Земцова [77,79]. Она показала, что в этой модели существует точное решение, геометрически изображаемое ромбом, вращающимся вокруг своего геометрического центра ромбом (рис. 5).

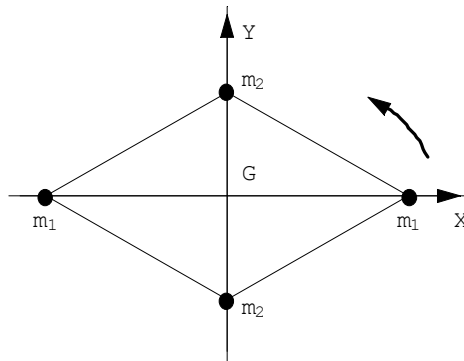


Рис. 5.

Такая конфигурация существует при выполнении условия равенства масс, находящихся в противоположных вершинах ромба, то есть:

$$m_1 = m_3, m_2 = m_4. \quad (1.42)$$

Далее, связь между массами, расположенными на «смежных» вершинах и величиной α , характеризующей разность между диагоналями ромба, а также величина угловой скорости, ω , выражаются следующими точными формулами:

$$m_2 = \frac{m_1(8\alpha^3 - (1 + \alpha^2)^{3/2})}{\alpha^3(8 - (1 + \alpha^2)^{3/2})}, \quad (1.43)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{m_1(64\alpha^3 - (1 + \alpha^2)^{3/2})}{4\alpha^3(1 + \alpha^2)^{3/2}(8 - (1 + \alpha^2)^{3/2})}}. \quad (1.44)$$

Совместное выполнение условий (1.42), (1.43), (1.434) гарантируют существование в ньютоновой проблеме 4-х тел точного решения ее дифференциальных уравнений, геометрически изображаемого ромбом, в вершинах которого «располагаются» массы m_1, m_2, m_3, m_4 , а разность между диагоналями характеризуется величиной α .

Важно отметить, что абсолютные размеры конфигурации могут быть произвольными, лишь бы выполнялись приведенные выше соотношения, из чего вытекает, что на самом деле мы имеем однопараметрическое (с параметром α) континуальное множество взаимно подобных ромбов, форма которых определяется приведенными выше аналитическими соотношениями.

Каждый из элементов этого множества является точным стационарным решением ньютоновой проблемы 4-х тел. Заметим, что в этой динамической модели существуют и другие точные частные решения, геометрически изображаемые другими фигурами, и свойства последних рассмотрены ниже, в п.1.11.

Задача №2. Рассмотрим теперь одну из динамических моделей ньютоновой проблемы 9-ти взаимно притягивающихся материальных точек с неравными нулю массами, $m_0, m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6, m_7, m_8$, также исследованную Н.И.Земцовой [79].

Необходимо доказать, что в ньютоновой проблеме 9-ти тел существует точное частное решение, геометрически изображаемое двумя гомотетичными концентрическими ромбами, равномерно вращающимися вокруг общего центра, точки P_0 с массой m_0 в их плоскости, с угловой скоростью ω , величину которой необходимо определить.

Априори считаем, что все взаимно гравитирующие тела расположены в одной плоскости (см. рис. 6) и имеют следующие координаты: $P_1(\alpha, 0)$, $P_2(0, 1)$, $P_3(-\alpha, 0)$, $P_4(0, -1)$, $P_5(\beta, 0)$, $P_6(0, \alpha / \beta)$, $P_7(-\beta, 0)$, $P_8(0, -\alpha / \beta)$, где величины α и β пока являются произвольными.

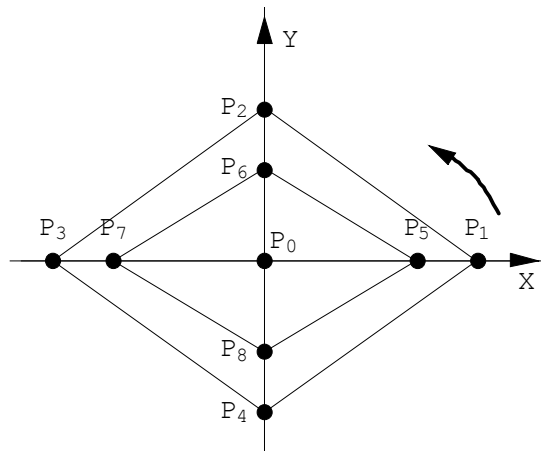


Рис. 6.

Для решения этой задачи мы воспользуемся аналитическими возможностями, описанными в п.1.4, то есть сначала воспользуемся необходимыми условиями существования центральных конфигураций для любого числа гравитирующих масс [46]. Эти необходимые условия выражаются следующими равенствами:

$$\begin{aligned}
\sum_{s=1, s \neq k}^n m_s (x_s y_k - x_k y_s) \left(\frac{1}{\Delta_{ks}^3} - \frac{1}{r_s^3} \right) &= 0, \\
\sum_{s=1, s \neq k}^n m_s (y_s z_k - y_k z_s) \left(\frac{1}{\Delta_{ks}^3} - \frac{1}{r_s^3} \right) &= 0, \\
\sum_{s=1, s \neq k}^n m_s (x_s z_k - x_k z_s) \left(\frac{1}{\Delta_{ks}^3} - \frac{1}{r_s^3} \right) &= 0, \\
k &= 1, 2, \dots, n. \\
\Delta_{ks}^2 &= (x_k - x_s)^2 + (y_k - y_s)^2 + (z_k - z_s)^2, \\
r_s^2 &= x_s^2 + y_s^2 + z_s^2.
\end{aligned} \tag{1.45}$$

Было доказано, что, для выбранной нами динамической модели, система (1.45) *непротиворечива* только в том случае, если массы удовлетворяют следующим равенствам:

$$m_1 = m_3, \quad m_2 = m_4, \quad m_5 = m_7, \quad m_6 = m_8. \tag{1.46}$$

Таким образом, одно из необходимых условий существования центральной конфигурации в виде двух «гомотетичных» ромбов выражаются равенствами масс, составляющими формулы (1.46). Используя эти соотношения, рассмотрим теперь *необходимые и достаточные условия существования «неинерциальных» центральных конфигураций*, то есть следующие основные соотношения, приведенные в той же монографии [46]:

$$\left\{ \begin{array}{l} I \left(\sum_{s=1}^n \left(\frac{x_s - x_k}{\Delta_{ks}^3} - \frac{x_s}{r_s^3} \right) - \frac{(m_0 + m_k)x_k}{r_k^3} \right) = -Wx_k, \\ I \left(\sum_{s=1}^n \left(\frac{y_s - y_k}{\Delta_{ks}^3} - \frac{y_s}{r_s^3} \right) - \frac{(m_0 + m_k)y_k}{r_k^3} \right) = -Wy_k, \\ I \left(\sum_{s=1}^n \left(\frac{z_s - z_k}{\Delta_{ks}^3} - \frac{z_s}{r_s^3} \right) - \frac{(m_0 + m_k)z_k}{r_k^3} \right) = -Wz_k, \\ k = 1, 2, \dots, n. \quad s \neq k. \end{array} \right. \quad (1.47)$$

где I – суммарный момент инерции системы тел, а функция W , как уже известно, является «аналогом» потенциала U для неинерциальной системы координат.

Для этих функций имеем следующие аналитические выражения:

$$\begin{aligned} I &= \sum_{k=1}^n m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2), \\ W &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{s=1, \\ s \neq k}}^n \frac{m_k m_s}{\Delta_{ks}} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{s=1, \\ s \neq k}}^n m_k m_s (x_k x_s + y_k y_s + z_k z_s) \left(\frac{1}{r_k^3} + \frac{1}{r_s^3} \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^n \frac{(m_0 + m_k) m_k}{r_k}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Подчеркнем, что мы использовали здесь вариант «неинерциальных условий» существования центральных конфигураций, поскольку здесь присутствует центральная масса m_0 [46].

После подстановки в систему (1.47) значений координат гравитирующих точек и некоторых формульных упрощений, Н.И. Земцова получила [78,79], в конечном итоге, систему трех алгебраических соотношений, в которой, например, три неизвестные мас-

сы m_2, m_5, m_6 выражаются через значения других масс, m_0, m_1 , а также через неизвестные геометрические величины α, β , характеризующие размеры конфигурации (для упрощения вычислений положим далее $m_0 = 1$):

$$\begin{cases} m_2 = f_{20}(\alpha, \beta)m_0 + f_{21}(\alpha, \beta)m_1, \\ m_5 = f_{50}(\alpha, \beta)m_0 + f_{51}(\alpha, \beta)m_1, \\ m_6 = f_{60}(\alpha, \beta)m_0 + f_{61}(\alpha, \beta)m_1. \end{cases} \quad (1.49)$$

Алгебраические выражения для функций $f_{20}(\alpha, \beta), \dots, f_{61}(\alpha, \beta)$ являются сложными иррациональными выражениями своих аргументов, поэтому здесь мы их не приводим, но их численные значения для конкретных наборов значений величин m_1, α и β были вычислены Н.И.Земцовой и приведены в упомянутой выше статье.

Там же получена и аналитическая формула для угловой скорости вращения конфигурации «два гомотетичных ромба», то есть для величины ω , которая выражается, через другие параметры модели точным соотношением, найденным с помощью системы Mathematica.

Приведем эту аналитическую формулу:

$$\begin{aligned} \omega^2 = & \frac{1}{\alpha^3} m_0 + \frac{1}{4\alpha^3} m_1 + \frac{2}{(1+\alpha^2)^{3/2}} m_2 + \\ & + \frac{4\beta}{(\beta^2 - \alpha^2)^2} m_5 + \frac{2\alpha^3}{(\alpha^4 + \beta^2)^{3/2}} m_6 \end{aligned} \quad (1.50)$$

Естественно, параметры – массы m_2, m_5, m_6 и квадрат угловой скорости ω^2 , при различных задаваемых нами значениях других положительных параметров m_1, α, β , должны удовлетворять очевидным неравенствам

$$m_2 \geq 0, m_5 \geq 0, m_6 \geq 0, \omega^2 \geq 0. \quad (1.51)$$

Аналитическое описание семейства ромбов, удовлетворяющих приведенным выше неравенствам, весьма громоздко и практически затруднительно, поэтому Н.И.Земцова реализовала «численно – аналитический эксперимент» и показала, что для конкретных заданных значений параметров m_1, α, β множество вещественных значений других параметров, то есть множество величин m_2, m_5, m_6, ω^2 , удовлетворяющих неравенствам (1.51) не пусто.

Например, для конкретного значения массы, $m_1 = 0.01$, таблица допустимых значений для геометрических параметров α, β содержит следующие их значения:

Таблица №1

α	Интервалы допустимых значений β
0.5	–
0.62	(1.126372; 1.130216)
0.7	(1.107623; 1.613425)
0.8	(1.117543; 2.215623)
0.9	(1.114732; 4.906742)
0.92	(1.135632; 4.921476)
0.95	(1.157462; 4.965123)
1	(1.209276; 4.991667)

Из таблицы видно, что, например, для значений $m_1 = 0.01$, $\alpha = 0.95$ и интервала значений параметра $\beta = (1.157462; 4.965123)$, величины m_2, m_5, m_6 и ω^2 являются положительными, а для значения $\alpha = 0.5$ интервал для параметра β не существует.

Эти результаты позволяют сделать следующее заключение:

Необходимыми и достаточными условиями существования ромбоподобных стационарных решений ньютоновой проблемы девяти тел во вращающейся, с угловой скоростью (1.50), координатной системе $P_0x y$, является одновременное выполнение условий (1.49)-(1.51).

п.1.9. УГЛОВАЯ СКОРОСТЬ ВРАЩЕНИЯ ПРАВИЛЬНОГО ГРАВИТИРУЮЩЕГО МНОГОУГОЛЬНИКА ВОКРУГ СВОЕГО ЦЕНТРА

В монографии [46] получена формула для квадрата угловой скорости вращения в своей плоскости *любого правильного многоугольника (n -угольника)* с равными между собой массами m в его вершинах и с произвольной массой m_0 в центре описанной около него окружности с радиусом, $R=a_0$. Она имеет вид:

$$\omega_n^2 = \frac{1}{a_0^3} \left[m_0 + \frac{m}{4} \sum_{k=2}^{n-1} \left(\sin \frac{\pi(k-1)}{n} \right)^{-1} \right], \quad (1.54)$$

Более корректное, с точки зрения словесного, описание приведенной формулы следующее: квадрат угловой скорости вращения правильного n -угольника вокруг своего центра выражается равенством (1.54), в котором: *величина a_0 – радиус описанной, около регулярного n -угольника окружности, в ньютоновой проблеме $(n+1)$ -тел имеющей точное частное решение, геометрически изображаемое равномерно вращающимся правильным многоугольником с равными массами m в его вершинах и с произвольной массой m_0 в его геометрическом центре.*

Соотношение (1.54) является частным случаем более общей формулы (1.39), приведенной в п.1.7, если положить в последней

$p=1$ и заменить координаты вершин регулярного n -угольника соответствующими величинами.

Геометрической иллюстрацией для приведенной выше формулы является рисунок с изображением равномерно вращающегося вокруг своего геометрического центра правильного восьмиугольника, который изображает одно из возможных положений равновесия в ньютоновой проблеме восьми тел, в равномерно вращающейся системе координат с однозначно детерминированной угловой скоростью ω , вычисленной по формуле (1.54), при условии, что $m_0 = 0$.

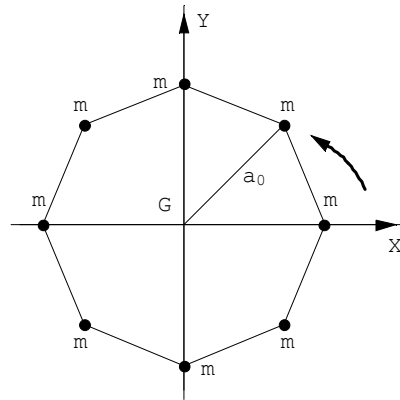


Рис. 7.

Как и раньше, «стрелка» на рисунке означает, что изображенная конфигурация вращается против часовой стрелки относительно инерциальной, не вращающейся системы координат, со своей однозначно определенной угловой скоростью:

$$\omega_8^2 = \frac{m}{4a_0^3} \sum_{k=2}^7 \left(\sin \frac{\pi(k-1)}{8} \right)^{-1}.$$

Это утверждение можно интерпретировать и как «*достаточные условия существования точного периодического решения для регулярного восьмиугольника, вращающегося в своей плоскости вокруг центральной точки P_0 со своей однозначно определенной угловой скоростью.*

После соответствующих вычислений, получаем, что квадрат угловой скорости вращения регулярного восьмиугольника в своей плоскости вокруг своего центра в точности равен числовой величине

$$\omega_8^2 = \frac{4\sqrt{2} - 2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}(1 + 2\sqrt{2})}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} \quad (1.55)$$

Перейдем теперь к анализу решений систем функциональных уравнений (1.36) и (1.38), выражающих необходимые и достаточные условия существования положений равновесия в проблеме n тел для конкретных значений параметра n .

п.1.10. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ТРЕХ ТЕЛ

Выше было сказано, что первыми найденными частными решениями ньютоновой проблемы трех тел ($n = 3$), типа «положений равновесия», были *коллинеарные решения* Эйлера и *равносторонний треугольник* Лагранжа [6,7,27].

Рассмотрим более подробно эту динамическую модель.

Для $n = 3$ ньютонов потенциал U , как частный случай общего выражения для ньютоновского потенциала (1.6), имеет вид:

$$U = \frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}} + \frac{m_1 m_3}{\Delta_{13}} + \frac{m_2 m_3}{\Delta_{23}} \quad (1.56)$$

Напишем теперь подробно алгебраические уравнения (1.36), или, что то же самое в этом случае, уравнения (1.38), для значений индекса $k = 1, 2, 3$, которые в этом конкретном случае представляются уравнениями:

$$\begin{cases}
 p_{1x} = 0, \\
 p_{1y} = 0, \\
 p_{1z} = 0, \\
 \omega^2 \bar{x}_1 + 2\omega p_{1y} + \frac{1}{m_1} \frac{\partial U}{\partial \bar{x}_1} = 0, \\
 \omega^2 \bar{y}_1 - 2\omega p_{1x} + \frac{1}{m_1} \frac{\partial U}{\partial \bar{y}_1} = 0, \\
 \frac{\partial U}{\partial \bar{z}_1} = 0.
 \end{cases}
 \quad
 \begin{cases}
 p_{2x} = 0, \\
 p_{2y} = 0, \\
 p_{2z} = 0, \\
 \omega^2 \bar{x}_2 + 2\omega p_{2y} + \frac{1}{m_2} \frac{\partial U}{\partial \bar{x}_2} = 0, \\
 \omega^2 \bar{y}_2 - 2\omega p_{2x} + \frac{1}{m_2} \frac{\partial U}{\partial \bar{y}_2} = 0, \\
 \frac{\partial U}{\partial \bar{z}_2} = 0.
 \end{cases}$$

$$\begin{cases}
 p_{3x} = 0, \\
 p_{3y} = 0, \\
 p_{3z} = 0, \\
 \omega^2 \bar{x}_3 + 2\omega p_{3y} + \frac{1}{m_3} \frac{\partial U}{\partial \bar{x}_3} = 0, \\
 \omega^2 \bar{y}_3 - 2\omega p_{3x} + \frac{1}{m_3} \frac{\partial U}{\partial \bar{y}_3} = 0, \\
 \frac{\partial U}{\partial \bar{z}_3} = 0.
 \end{cases}
 \quad (1.57)$$

Очевидно, что в этой системе уравнения, определяющие импульсы можно «отбросить», но мы их здесь привели для того, чтобы читатель не оставил их без внимания тогда, когда делаются общие выводы о свойствах стационарных решений – положений равновесия.

Эйлер в 1765 году показал [7], что нелинейные функциональные уравнения (1.57) допускают точное, так называемое *коллинеарное решение*, которое характеризуется тем, что три материальные точки с любыми произвольными положительными значениями масс m_1, m_2, m_3 , при определенных начальных условиях (координат и скоростей), вечно располагаются на некоторой прямой, которая вращается с постоянной угловой скоростью вокруг их общего центра масс (точка G , рис. 8) в некоторой неизменной плоскости. Положения этих трех точек на вращающейся прямой являются фиксированными и полностью определяются начальными положениями гравитирующих точек и их начальными значениями скоростей.

На рис. 8 изображена прямая, на которой расположены три гравитирующие между собой массы m_1, m_2, m_3 , вращающаяся с постоянной угловой скоростью ω вокруг их центра масс, величина которой однозначно определяется значениями их масс и их взаимных расстояний. Вращение происходит «вечно» в координатной плоскости Gxy .

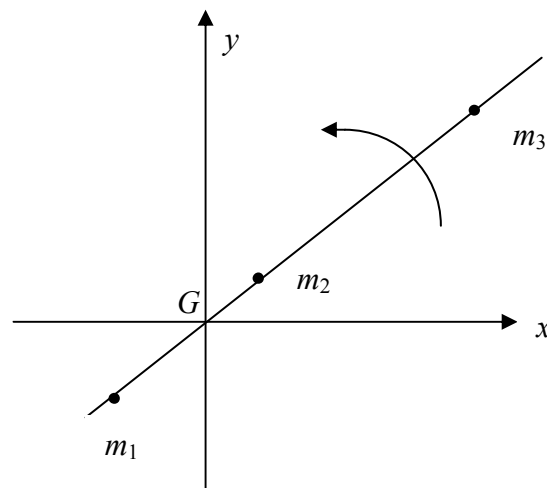


Рис. 8.

Лагранж в 1772 году опубликовал работу [6], в которой описано новое точное частное решение дифференциальных уравнений ньютоновой проблемы трех тел, геометрически изображаемое равносторонним, равномерно вращающимся вокруг своего центра масс, треугольником, в вершинах которого располагаются гравитирующие массы m_1, m_2, m_3 (см. рис. 9)

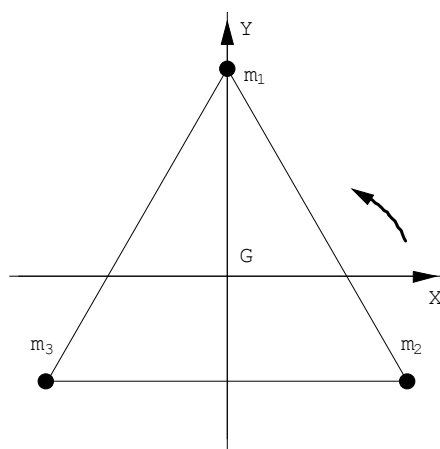


Рис. 9.

На этом рисунке точка G в принципе означает геометрический, а не динамический центр треугольника, поскольку в этой точке отсутствует какая-либо масса.

Эта динамическая модель была, на протяжении длительного исторического промежутка времени, основным стимулом для развития теории устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений космической динамики (о чем подробно написано в гл. 3), но здесь мы приведем, без доказательства, два важных результата, которые касаются «поведения» траекторий небесных тел на «больших», или, можно сказать «весьма больших» промежутках времени:

1. Коллинеарное решение Эйлера являются неустойчивым [79,80] для любого набора значений гравитирующих масс m_1, m_2, m_3 и любого набора начальных отклонений от положения равновесия.
2. «Треугольник» Лагранжа является «устойчивым в первом приближении», если выполняется известное условие Рау-сса-Ляпунова [81],

$$(m_1+m_2+m_3)^2 > 27(m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3) \quad (1.58)$$

Что касается проблемы устойчивости треугольника Лагранжа в смысле Ляпунова, или как еще говорят «устойчивости по Ляпунову» [81,82], эта математическая проблема оказалась одной из наиболее трудных проблем в качественной теории дифференциальных уравнений и ее решение было получено, лишь спустя 200 лет после его открытия Лагранжем.

Проблема была решена, благодаря КАМ-теории, то есть теории устойчивости частных решений гамильтоновых систем с аналитическим и периодическим по «быстрым угловым переменным» гамильтонианом, созданной А.Н. Колмогоровым, В.И. Арнольдом и Ю. Мозером [83-87] в середине прошлого века. Заинтересованному в этих проблемах читателю можно также рекомендовать научно-популярное издание [88] и третью главу настоящей монографии.

Если считать, что массы в вершинах равностороннего треугольника равны между собой, $m_1=m_2=m_3=t$, масса $m_0=0$ и радиус описанной окружности $a_0=1$, тогда, используя соотношение (1.54), можно легко определить угловую скорость вращения треугольника вокруг своего геометрического центра, квадрат которой будет равен

$$\omega_3^2 = \frac{3m}{2\sqrt{2}}.$$

п.1.11. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ЧЕТЫРЕХ ТЕЛ

Пусть имеются четыре материальные точки, P_1, P_2, P_3, P_4 , с массами m_1, m_2, m_3, m_4 взаимно притягивающие друг друга в соответствии с законом гравитации Ньютона, изображенные на рис. 10.

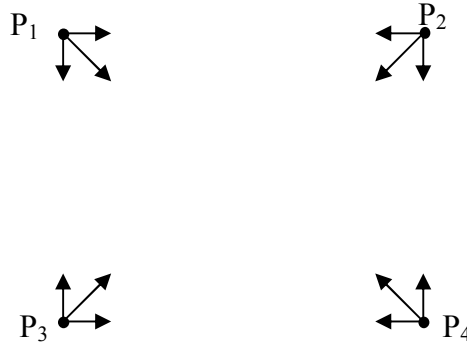


Рис. 10.

Положения равновесия в этой модели определяются из той же системы функциональных уравнений, которая приведена в п.1.8:

$$\begin{cases} p_{kx} = 0, p_{ky} = 0, p_{kz} = 0, \\ \omega^2 \bar{x}_k + 2\omega \bar{y}_k + \frac{1}{m_k} \frac{\partial U}{\partial \bar{x}_k} = 0, \\ \omega^2 \bar{y}_k - 2\omega \bar{x}_k + \frac{1}{m_k} \frac{\partial U}{\partial \bar{y}_k} = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial \bar{z}_k} = 0, k = 1, 2, 3, 4. \end{cases} \quad (1.41)$$

Очевидно здесь потенциал U выражается формулой

$$U = \frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}} + \frac{m_1 m_3}{\Delta_{13}} + \frac{m_1 m_4}{\Delta_{14}} + \frac{m_2 m_3}{\Delta_{23}} + \frac{m_2 m_4}{\Delta_{24}} + \frac{m_3 m_4}{\Delta_{34}}, \quad (1.59)$$

а взаимные расстояния Δ_{ik} между притягивающимися точками P_i, P_k вычисляются по очевидным формулам:

$$\Delta_{ik}^2 = (x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2 + (z_i - z_k)^2, \quad i, k = 1, 2, 3, 4, \quad i \neq k. \quad (1.60)$$

В этой модели различными авторами найдены следующие положения равновесия, для которых геометрическими образами служат следующие фигуры:

1. квадрат с равными между собой массами в его вершинах [55];
2. ромб с попарно равными между собой массами, исследованный Н.И.Земцовой и рассмотренный в п.1.8 [77,78];
3. равносторонний треугольник с произвольной массой в его центре, и с равными массами в его вершинах, [67,90];
4. дельтоид, в вершинах которого расположены массы, две из которых равны между собой [90,91];
5. симметричные гомографические решения задачи четырех тел в пространстве Нехвила, изображенные на рис.11, найденные А.Н.Прокопеня [92,93].

Естественно, *все конфигурации неподвижны, каждая в своей равномерно вращающейся «барицентрической системе координат»*, а ее угловая скорость относительно неподвижной системы координат определяется однозначным образом. Для этих конфигураций найдены компактные точные аналитические зависимости между геометрическими и динамическими параметрами моделей (между массами и размерами конфигураций), которые выражают, как правило, необходимые и достаточные условия существования самих этих центральных конфигураций.

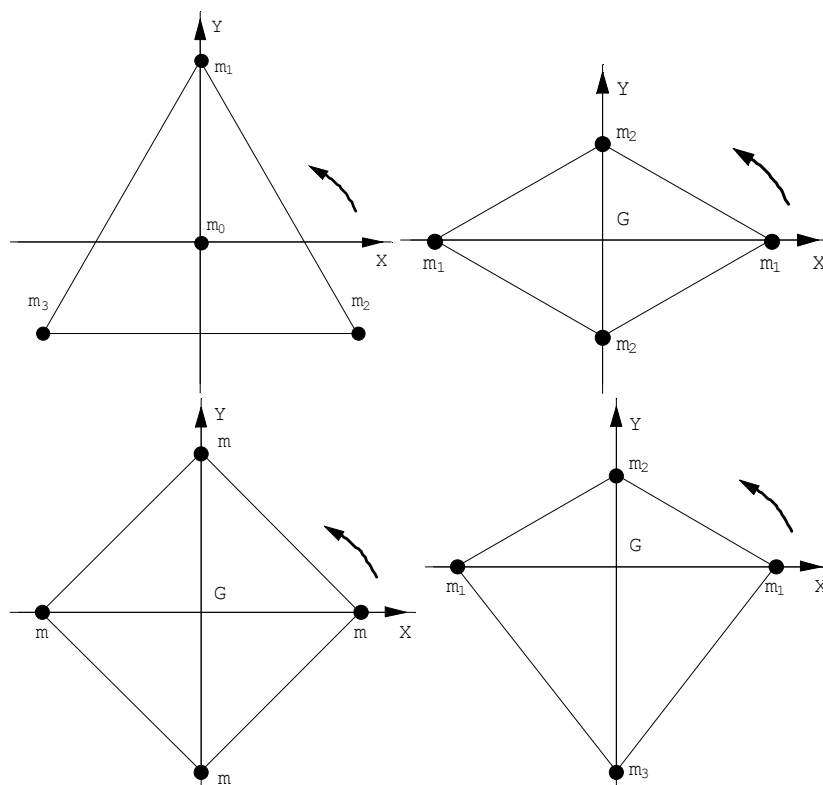


Рис. 11.

Для квадрата, изображенного на рис. 11, имеем следующие условия: $m_0=0$, так как отсутствует центральная масса, а массы в вершинах равны между собой, $m_1=m_2=m_3=m_4=m$; радиус описанной окружности будем считать равным единице, $a_0=1$. Тогда, пользуясь основным соотношением для угловой скорости вращения конфигурации, формулой (1.54), находим величину «квадрата» угловой скорости вращения квадрата:

$$\omega_4^2 = \frac{m(4 + \sqrt{2})}{4\sqrt{2}} \quad (1.61)$$

Рассмотрим теперь конфигурацию «треугольник с внутренней массой».

Для этой конфигурации следует положить в формуле (1.54) следующие параметры: радиус описанной окружности $a_0=1$, a число вершин, $n=3$. Тогда получим для квадрата угловой скорости вращения равностороннего треугольника вокруг своего центра формулу

$$\omega_3^2 = m_0 + \frac{m}{\sqrt{3}} \quad (1.62)$$

Конфигурация типа «ромб», для которого зависимость между угловой скоростью вращения конфигурации ω и соотношением между его диагоналями α является более сложной, описана выше в п. 1. Действительно, пусть гравитирующие точки $P_1(\alpha, 0)$, $P_2(0, 1)$, $P_3(-\alpha, 0)$, $P_4(0, -1)$ имеют массы m_1, m_2, m_3, m_4 соответственно.

Тогда угловая скорость вращения ромба ω , массы, находящиеся в его вершинах и его геометрические параметры связаны между собой уже известными *точными алгебраическими соотношениями*, полученными Н.И. Земцовой [77-79]:

$$m_1 = m_3, \quad m_2 = m_4, \quad (1.42)$$

$$m_2 = \frac{m_1(8\alpha^3 - (1 + \alpha^2)^{3/2})}{\alpha^3(8 - (1 + \alpha^2)^{3/2})}. \quad (1.43)$$

$$\omega^2 = \frac{m_1(64\alpha^3 - (1 + \alpha^2)^{3/2})}{4\alpha^3(1 + \alpha^2)^{3/2}(8 - (1 + \alpha^2)^{3/2})}, \quad (1.44)$$

Что касается дельтоида, его угловая скорость вращения относительно точки пересечения диагоналей, величина ω вычислена С.Фетисовой [90,91] и она равна

$$\omega^2 = \frac{m}{4\alpha^3} \left(1 + \frac{4\mu}{(1+\alpha^2)^{3/2}} + \frac{4\nu}{(1+(\alpha-\beta)^2)^{3/2}} \right) \quad (1.63)$$

В соотношении (1.63) считается, что массы точек P_1 и P_2 , расположенные на горизонтальной диагонали равны m , масса точки P_3 , величина $m_3=\mu m$, а масса точки P_4 , величина $m_4=\nu m$. Точки P_3, P_4 расположены на «вертикальной» диагонали дельтоида. Кроме того, линейные размеры дельтоида связаны зависимостями $b=\alpha a, d=\beta a$.

п.1.12. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ПЯТИ ТЕЛ

Если будем рассматривать ту же *основную систему нелинейных алгебраических уравнений* (1.38), определяющую положения равновесия ньютоновой проблемы многих тел, но будем рассматривать конкретное значение, $n=5$, тогда появляется надежда найти все центральные конфигурации в ньютоновой задаче пяти тел. Заметим лишь, что чем больше значение параметра n , тем богаче может быть множество стационарных решений в проблеме многих тел.

Для значения $n=5$ известны следующие конфигурации:

1. правильный (регулярный) пятиугольник с равными между собой массами, $m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m$ в вершинах;
2. квадрат с равными в его вершинах массами, $m_1=m_2=m_3=m_4=m$ и с массой m_0 в центре [93];
3. ромб с массой m_0 в центре и с попарно равными массами в противоположных вершинах, значения которых зависят от отношения сторон ромба, исследованный Н.И. Земцовой;
4. дельтоид «с центром» m_0 , найденный и исследованный в статьях А.Н. Прокопеня и С. Фетисовой [91,92].

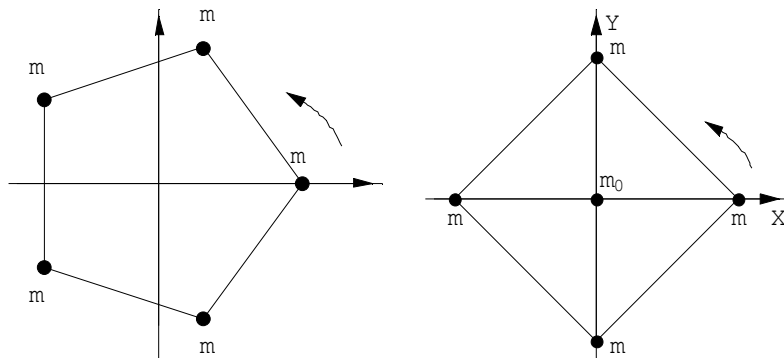


Рис. 12.

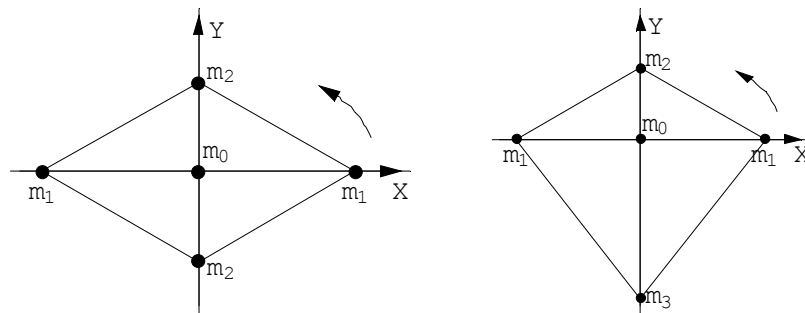


Рис. 13.

К двум, приведенным выше правильным многоугольникам (пятиугольник и квадрат «с центром»), применима общая формула (1.54). Для правильного пятиугольника точное значение угловой скорости его вращения вокруг своего центра выражается формулой

$$\omega_5^2 = \frac{m}{4} \left[\frac{1}{\sin \frac{\pi}{5}} + \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{5}} + \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{5}} + \frac{1}{\sin \frac{4\pi}{5}} \right],$$

или, после точных вычислений, выполненных в системе «Mathematica», получим, что его угловая скорость вращения вокруг центра в точности равна

$$\omega_5^2 = m \left(\sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}} \right). \quad (1.64)$$

Еще раз подчеркнем, что именно только для этого значения угловой скорости вращения пятиугольника с радиусом окружности «единица» правильный пятиугольник является положением равновесия – *частным решением дифференциальных уравнений ньютоновой проблемы пяти тел.*

Для центральной конфигурации «квадрат с массой m_0 в центре» использование формулы (1.54) дает следующее значение для квадрата его угловой скорости, гарантирующей существование такой конфигурации:

$$\omega_5^2 = m_0 + \frac{m(4+\sqrt{2})}{4\sqrt{2}}. \quad (1.65)$$

Для ромба с массой m_0 в центре, соотношения между его динамическими и геометрическими параметрами получены в статьях Н.И. Земцовой [77-79]. Они имеют вид:

$$m_1 = m_3, \quad m_2 = m_4$$

$$m_2 = \frac{4m_0(1+\alpha^2)^{3/2}(\alpha^3-1) + m_1(8\alpha^3 - (1+\alpha^2)^{3/2})}{\alpha^3(8 - (1+\alpha^2)^{3/2})}. \quad (1.66)$$

$$\omega_5^2 = \frac{4m_0(1+\alpha^2)^{3/2}(8\alpha^3 - (1+\alpha^2)^{3/2}) + m_1(64\alpha^3 - (1+\alpha^2)^{3/2})}{4\alpha^3(1+\alpha^2)^{3/2}(8 - (1+\alpha^2)^{3/2})}. \quad (1.67)$$

Для дельтоида с притягивающим центром его угловая скорость вращения, гарантирующая существование такой конфигурации, была вычислена С. Фетисовой [94].

п.1.13. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ШЕСТИ ТЕЛ

В этой гравитационной модели сегодня изучены следующие конфигурации:

1. правильный шестиугольник с равными между собой массами в вершинах, $m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m_6=m$. Очевидно, существование такой конфигурации вытекает из теоремы Эльмабсута (см. п.1.7);
2. правильный пятиугольник с равными массами в вершинах, $m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m$ и с произвольной массой m_0 в его геометрическом центре;
3. два равносторонних треугольника, с общим центром, один из которых расположен внутри другого, а его вершины «смещены» по углу на величину $\pi/3$, независимо от направления вращения;*
4. два «концентрических» равносторонних треугольника «без вращения» друг относительно друга.

Перечисленные конфигурации изображены на рисунках 14-15.

Применяя общее выражение для квадрата угловой скорости вращения центральной конфигурации (1.54) к конфигурации «шестиугольник без центральной массы», получаем, для его угловой скорости вращения вокруг геометрического центра, точную конкретную формулу

* Эта конфигурация очевидно представляет собой частный случай теоремы Эльмабсута. Укажем также на интересную статью А. Силушик [106], в которой дано другое доказательство существования этой конфигурации.

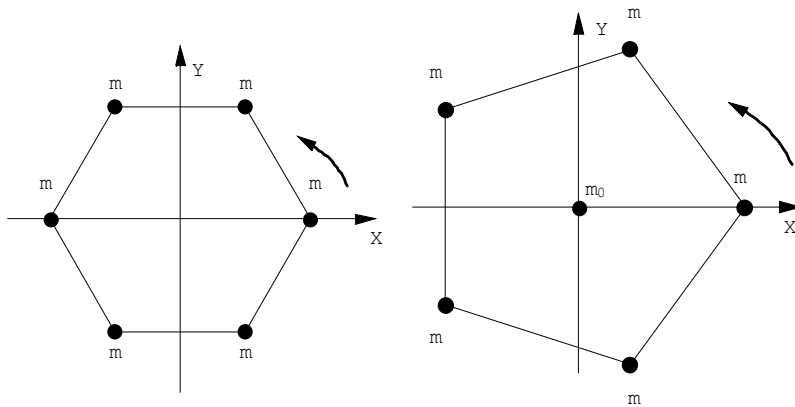


Рис. 14.

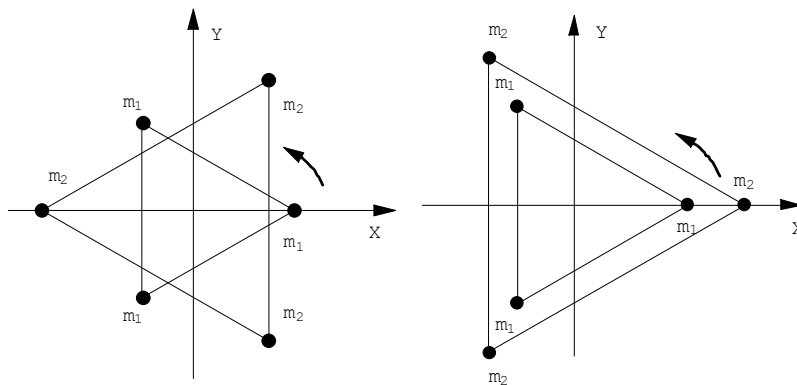


Рис. 15.

$$\omega_6^2 = \frac{m(5\sqrt{3} + 4)}{4\sqrt{3}} \quad (1.68)$$

Для пятиугольника с центральной массой m_0 и с равными между собой массами в вершинах m , точное значение квадрата угловой скорости его вращения, очевидно гарантирующей существование положения равновесия этой фигуры, вычисляется по формуле

$$\omega^2 = m_0 + \frac{m}{4} \left(\frac{1}{\sin \frac{\pi}{5}} + \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{5}} + \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{5}} + \frac{1}{\sin \frac{4\pi}{5}} \right),$$

или, после упрощений,

$$\omega^2 = m_0 + \frac{m}{\sqrt{10}} \left(\sqrt{5 - \sqrt{5}} + \sqrt{5 + \sqrt{5}} \right). \quad (1.69)$$

Для фигуры, состоящей из двух треугольников «с поворотом на угол $\pi/3$ », имеем следующую зависимость между массами и размерами треугольников, то есть между величинами «1» и « α », выведенную в работе [106]

$$m_2 = \frac{\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{3}} - \frac{1-2\alpha}{2(1-\alpha+\alpha^2)^{3/2}} - \frac{1}{2(1+\alpha)^2} \right) m_1}{\left(\frac{1}{2\sqrt{3}\alpha^2} - \frac{\alpha}{2(1+\alpha)^2} - \frac{(2-\alpha)\alpha}{2(1-\alpha+\alpha^2)^{3/2}} \right)} \quad (1.70)$$

Угловая скорость вращения этой конфигурации определяется по формуле

$$\omega^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} m_1 + \left(\frac{1}{(1+\alpha)^2} + \frac{2-\alpha}{(1+\alpha+\alpha^2)^{3/2}} \right) m_2 \quad (1.71)$$

Все вычисления над числами и символами, выполненными в этом параграфе, также как и в других параграфах, являются «абсолютно точными», так как мы нигде не использовали последовательные приближения, рекуррентные соотношения или бесконечные ряды. Нами были использованы лишь алгоритмы и правила, предоставляемые системой «Mathematica».

п.1.14. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ СЕМИ ТЕЛ

В этой динамической модели известны следующие решения:

- 1) правильный шестиугольник с центральной массой m_0 и с равными между собой массами в его вершинах, $m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m_6=m$;
- 2) правильный семиугольник с равными массами в вершинах, $m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m_6=m_7=m$;
- 3) два концентрических равносторонних треугольника с общей массой m_0 в центре, ориентированные друг относительно друга на угол $\pi/3$, или «без относительного поворота» один относительно другого, имеющие, каждый в своих вершинах, равные массы: $m_1=m_2=m_3=m$, $m_4=m_5=m_6=m^*$. Эта конфигурация, очевидно, также является следствием из теоремы п.1.7.

Например, для правильного семиугольника (без центральной массы m_0) и правильного шестиугольника с центральной массой m_0 , выражения для угловой скорости вращения вытекают, как частный случай, из общей формулы (1.54). Для этих случаев будем иметь:

$$\begin{aligned}\omega^2 &= \frac{m}{4} \sum_{k=2}^7 \frac{1}{\sin((k-1)\pi/7)} = \\ &= \frac{m}{2} \left(\frac{1}{\sin(\pi/7)} + \frac{1}{\sin(2\pi/7)} + \frac{1}{\sin(3\pi/7)} \right)\end{aligned}\quad (1.72)$$

$$\omega^2 = m_0 + \frac{m}{4} \sum_{k=2}^6 \frac{1}{\sin((k-1)\pi/6)} = m_0 + m \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (1.73)$$

Для угловой скорости вращения правильного семиугольника не удастся получить более компактную формулу, чем формула (1.72), в то время, как для случая шестиугольника «с центром», квадрат угловой скорости его вращения вокруг центра имеет весьма компактный вид (см. формулу (1.73)).

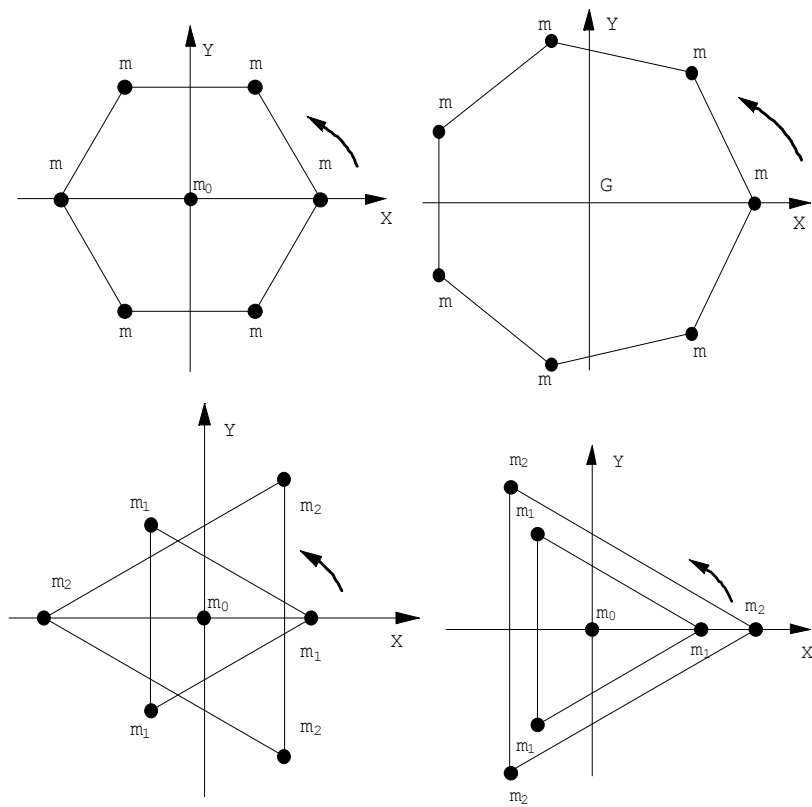


Рис. 16.

Условия, гарантирующие существование центральных конфигураций на базе равносторонних треугольников, получены А. Силушик [106,107].

п.1.15. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ВОСЬМИ ТЕЛ

Известны следующие стационарные решения проблемы восьми тел, геометрия которых описана ниже:

- 1) регулярный, вращающийся вокруг своего геометрического центра, правильный восьмиугольник с равными массами, $m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m_6=m_7=m_8=m$, в вершинах;
- 2) правильный семиугольник с произвольной массой m_0 в центре и с равными массами $m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m_6=m_7=m$ в вершинах;
- 3) конфигурация, состоящая из двух квадратов с общим геометрическим центром и с углом поворота одного квадрата относительно другого, равным $\pi/4$, существование которой гарантировано теоремой из п.1.7;
- 4) конфигурация, состоящая из двух квадратов с общим геометрическим центром (без поворота), предложенная Е.В. Ихсановым [93];
- 5) конфигурация, состоящая из двух ромбов «без относительного поворота», рассмотренная Н.И. Земцовой в статьях [98,99];
- 6) конфигурация, состоящая из двух ромбов с угловым сдвигом одного относительно другого на угол $\pi/2$;
- 7) конфигурация, состоящая из прямоугольника и ромба, найденная Д.М.Диаровой [97].

Перечисленные конфигурации изображены на рис. 17.

Приведем ниже условия, гарантирующие существование точных частных решений в проблеме 8-ми тел в виде правильного восьмиугольника, двух ромбов и «ромб+прямоугольник».

Для регулярного восьмиугольника с равными в вершинах массами, $m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m_6=m_7=m_8=m$, его угловая скорость вращения определяется по известной формуле (1.54), которая для этого случая может быть записана в виде

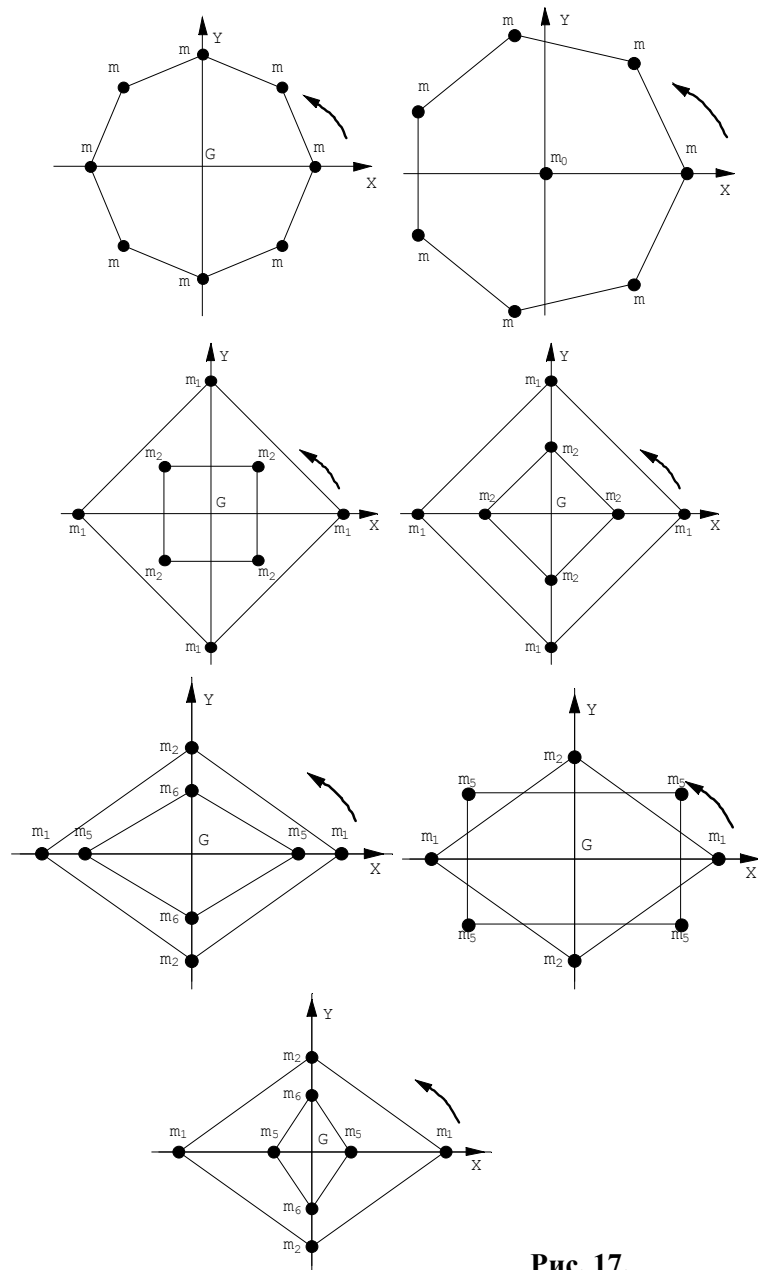


Рис. 17.

$$\omega_8^2 = \frac{m}{4} \sum_{k=2}^8 \left(\sin \frac{\pi(k-1)}{8} \right)^{-1} = \frac{m}{4} \left(1 + \frac{2}{\sin \frac{\pi}{8}} + \frac{2}{\sin \frac{2\pi}{8}} + \frac{2}{\sin \frac{3\pi}{8}} \right). \quad (1.74)$$

Точные вычисления по формуле (1.54) дают следующий результат для угловой скорости вращения восьмиугольника:

$$\omega_8^2 = m \left(4 + \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} + \sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \right). \quad (1.75)$$

2) Правильный семиугольник с равными массами в вершинах, $m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m_6=m_7=m$ и с произвольной массой m_0 в центре, для которого угловая скорость его вращения определяется также формулой (1.54), если заменить параметр n на число 7:

$$\begin{aligned} \omega_7^2 &= m_0 + \frac{m}{4} \sum_{k=2}^7 \left(\sin \frac{\pi(k-1)}{7} \right)^{-1} = \\ &= m_0 + \frac{m}{4} \left(\frac{1}{\sin \frac{\pi}{7}} + \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{7}} + \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{7}} + \frac{1}{\sin \frac{4\pi}{7}} + \frac{1}{\sin \frac{5\pi}{7}} + \frac{1}{\sin \frac{6\pi}{7}} \right). \end{aligned} \quad (1.76)$$

3) Конфигурация «ромб+прямоугольник». Для этой конфигурации имеем следующие условия ее существования, найденные Д. Диаровой [97,103]:

$$m_1 = m_3, \quad m_2 = m_4, \quad m_5 = m_6 = m_7 = m_8, \quad (1.77)$$

$$\omega^2 = \frac{m_1}{4} + \frac{2m_2}{(1+\alpha^2)^{3/2}} + 2m_5 \left(\frac{1+\beta}{((1+\beta)^2 + \gamma^2)^{3/2}} + \frac{1-\beta}{((1-\beta)^2 + \gamma^2)^{3/2}} \right) \quad (1.78)$$

Здесь параметр α означает отношение диагоналей ромба, а параметры β и γ – половинки сторон прямоугольника.

4) Конфигурация, состоящая из двух квадратов с относительным угловым сдвигом на величину угла, равную $\pi/4$. Для масс, очевидно, имеем равенства

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m, m_5 = m_6 = m_7 = m_8 = m^*, \quad (1.79)$$

а квадрат угловой скорости вращения конфигурации дается формулой [93]

$$\omega^2 = \frac{m}{4} + \frac{m}{\sqrt{2}} + 2m^* \left(\frac{1+\alpha}{((1+\alpha)^2 + \alpha^2)^{3/2}} + \frac{1-\alpha}{((1-\alpha)^2 + \alpha^2)^{3/2}} \right), \quad (1.80)$$

где величина α численно характеризует отношение сторон различных квадратов.

5) Два квадрата «без относительного углового сдвига». Их массы равны соответственно, $m_1=m_2=m_3=m_4=m$ и $m_5=m_6=m_7=m_8=m^*$, а отношение их сторон равно величине α .

Тогда угловая скорость вращения конфигурации определяется по формуле [93]

$$\omega^2 = \left(\frac{1}{4\alpha^3} + \frac{2}{(1+\alpha^2)^{3/2}} \right) m + \left(\frac{4}{(1-\alpha^2)^2} + \frac{2\alpha^3}{(\alpha^4+1)^{3/2}} \right) m^* \quad (1.81)$$

6) Два ромба «без углового сдвига». Условия, гарантирующие существование этой конфигурации приведены в статьях Н.И. Земцовой [9,100].

Если m_1, m_2, m_3, m_4 – массы тел в вершинах одного ромба, а m_5, m_6, m_7, m_8 – массы тел в вершинах другого ромба, тогда одно из необходимых условий существования конфигурации являются следующие равенства масс: $m_1 = m_3, m_2 = m_4, m_5 = m_7, m_6 = m_8$.

Для угловой скорости вращения этой конфигурации Н.И. Земцова получила следующую зависимость:

$$\omega^2 = \frac{m_1}{4\alpha^3} + \frac{2m_2}{(1+\alpha^2)^{3/2}} + \frac{4\beta m_5}{(\beta^2 - \alpha^2)^2} + \frac{2\alpha^3 m_6}{(\alpha^4 + \beta^2)^{3/2}}, \quad (1.82)$$

где параметры α, β суть размеры диагоналей ромба.

Для угловой скорости вращения конфигурации «ромб+прямоугольник» выражение для угловой скорости ее вращения, полученное Д. Диаровой [100,101], приведено ниже. Отметим, что на самом деле в ее статье [106] получены четыре аналитические представления для угловой скорости ω_8 , которые, по существу, тождественны между собой, поэтому численное значение угловой скорости можно, очевидно, вычислять по любой из упомянутых формул, с учетом следующих равенств между массами:

$$m_1 = m_3, m_2 = m_4, m_5 = m_7 = m_6 = m_8. \quad (1.83)$$

Ниже мы приводим эти четыре зависимости, которые представляются формулами:

$$\omega_8^2 = \frac{m_1}{4} + \frac{2m_2}{(1+\alpha^2)^{3/2}} + 2m_5 \left(\frac{1+\beta}{((1+\beta)^2 + \gamma^2)^{3/2}} + \frac{1-\beta}{((1-\beta)^2 + \gamma^2)^{3/2}} \right), \quad (1.84)$$

$$\begin{aligned} \omega_8^2 = & \frac{m_1}{\beta} \left(\frac{1+\beta}{((1+\beta)^2 + \gamma^2)^{3/2}} - \frac{2-\beta}{((1-\beta)^2 + \gamma^2)^{3/2}} \right) + \\ & + m_2 \left(\frac{1}{(\beta^2 + (\alpha - \gamma)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(\beta^2 + (\alpha + \gamma)^2)^{3/2}} \right) + \\ & + \frac{m_5}{4} \left(\frac{1}{\beta^3} + \frac{1}{(\beta^2 + \gamma^2)^{3/2}} \right), \end{aligned} \quad (1.85)$$

$$\omega_8^2 = \frac{2m_1}{(1+\alpha^2)^{3/2}} + \frac{m_2}{4\alpha^3} + \frac{2m_5}{\alpha} \left(\frac{\alpha+\gamma}{(\beta^2+(\alpha+\gamma)^2)^{3/2}} + \frac{\alpha-\gamma}{(\beta^2+(\alpha-\gamma)^2)^{3/2}} \right), \quad (1.86)$$

$$\omega_8^2 = m_1 \left(\frac{1}{((1+\beta)^2+\gamma^2)^{3/2}} + \frac{1}{((1-\beta)^2+\gamma^2)^{3/2}} \right) - \frac{m_2}{\gamma} \left(\frac{\alpha-\gamma}{(\beta^2+(\alpha-\gamma)^2)^{3/2}} - \frac{\alpha+\gamma}{(\beta^2+(\alpha+\gamma)^2)^{3/2}} \right) + \frac{m_5}{4} \left(\frac{1}{\gamma^3} + \frac{1}{(\beta^2+\gamma^2)^{3/2}} \right). \quad (1.87)$$

Отметим еще раз, что указанные соотношения достаточно эффективны для контроля правильности промежуточных вычислений, необходимых при построении семейств центральных конфигураций.

п.1.16. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ДЕВЯТИ ТЕЛ

В этой динамической модели известны следующие конфигурации, геометрически изображающие точные частные решения ньютоновой проблемы 9-и тел:

1) правильный девятиугольник с равными, между собой, массами в вершинах, $m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m_6=m_7=m_8=m_9=m$, но в его геометрическом центре нет центральной массы. Его угловая скорость вращения, как частный случай общей формулы (1.54), принимает вид

$$\omega_9^2 = \frac{m}{4} \sum_{k=2}^9 \left(\sin \frac{\pi(k-1)}{9} \right)^{-1} \quad (1.88)$$

На рисунке 18 изображены правильный девятиугольник «без гравитационного центра» и правильный восьмиугольник с неравной нулю массой m_0 в его геометрическом центре.

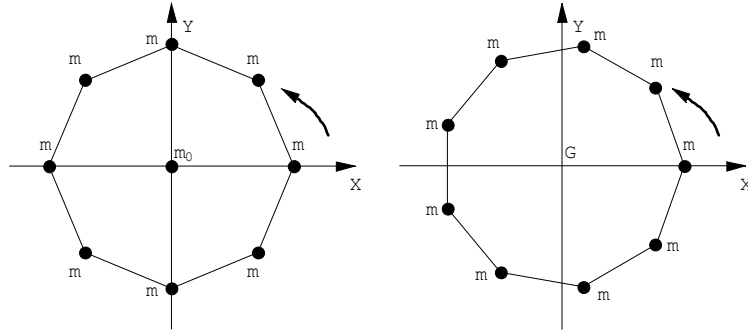


Рис. 18

2) Правильный восьмиугольник с равными в вершинах массами, $m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m_6=m_7=m_8=m$ и с произвольной массой m_0 в центре. Угловая скорость его вращения определяется, очевидно, по формуле (1.54)

$$\omega_9^2 = m_0 + \frac{m}{4} \sum_{k=2}^8 \left(\sin \frac{\pi(k-1)}{8} \right)^{-1}, \quad (1.89)$$

или, после упрощений, получим соотношение

$$\omega_9^2 = m_0 + \frac{m}{4} \left(\frac{2}{\sin \frac{\pi}{8}} + \frac{2}{\sin \frac{2\pi}{8}} + \frac{2}{\sin \frac{3\pi}{8}} + \sqrt{2} \right) \quad (1.90)$$

Окончательное выражение для угловой скорости вращения этой конфигурации удастся вычислить «точно»:

$$\omega_9^2 = m_0 + \frac{m}{4\sqrt{2}} \left(4 + \sqrt{2} + 4\sqrt{2 + \sqrt{2}} + 4\sqrt{2 - \sqrt{2}} \right). \quad (1.91)$$

3) Для динамической модели – кольцеобразной плоской ньютоновой проблемы 9-ти тел, состоящей из двух квадратов с массой m_0 в их общем центре, число квадратов в обозначениях п.1.7, то есть величина $p = 2$, а число вершин каждого квадрата очевидно равно $n = 4$. Следовательно, для этого случая имеем значения $(p=2; n=4)$.

Существование этого гомографического решения задачи 9-ти тел вытекает, в частности, из теорем, приведенных в п.1.7 и оно изображено на рис. 19, на котором, во вращающейся системе координат, выбран удобный линейный масштаб, $P_0 P_1 = 1$.

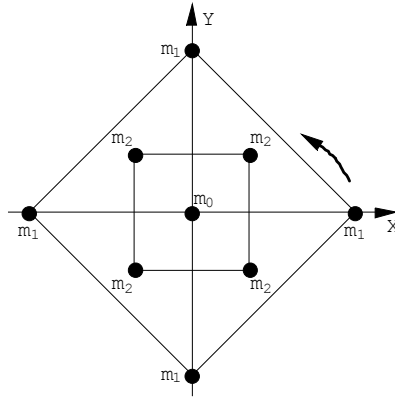


Рис. 19

Опишем более подробно эту динамическую модель, исследованную Е.В.Ихсановым [93]. Согласно его результатам, угловая скорость первого квадрата, то есть величина ω_l должна одновременно удовлетворять следующим двум соотношениям:

$$\begin{aligned} \omega_l^2 x_{l,k} = & \frac{M_0 x_{l,k}}{(x_{l,k}^2 + y_{l,k}^2)^{3/2}} + \sum_{\substack{1 \leq r \leq 2 \\ r \neq l}} m_r \sum_{j=1}^4 \frac{x_{l,k} - x_{r,j}}{[(x_{l,k} - x_{r,j})^2 + (y_{l,k} - y_{r,j})^2]^{3/2}} + \\ & + m_l \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^4 \frac{x_{l,k} - x_{l,j}}{[(x_{l,k} - x_{l,j})^2 + (y_{l,k} - y_{l,j})^2]^{3/2}}, \quad l = 1, 2, \quad k = 1, 2, 3, 4, \end{aligned} \quad (1.92)$$

$$\begin{aligned} \omega_l^2 y_{l,k} = & \frac{M_0 y_{l,k}}{(x_{l,k}^2 + y_{l,k}^2)^{3/2}} + \sum_{\substack{1 \leq r \leq 2 \\ r \neq l}} m_r \sum_{j=1}^4 \frac{y_{l,k} - y_{r,j}}{[(x_{l,k} - x_{r,j})^2 + (y_{l,k} - y_{r,j})^2]^{3/2}} + \\ & + m_l \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^4 \frac{y_{l,k} - y_{l,j}}{[(x_{l,k} - x_{l,j})^2 + (y_{l,k} - y_{l,j})^2]^{3/2}}, \quad l=1,2, \quad k=1,2,3,4, \end{aligned} \quad (1.93)$$

Такая «покоординатная» форма записи теоремы, приведенной в п.1.7, указывает на то, что угловая скорость ω_l вращения l -го квадрата не зависит от индекса вершины с номером k , поэтому проверка условий (1.92) и (1.93) сводится к получению зависимостей между динамическими параметрами – массами m_1 и m_2 и геометрическими параметрами – радиусами окружностей, в которые вписаны квадраты.

Координаты большего квадрата $P_1 P_2 P_3 P_4$, изображенного на рис. 19, очевидно даются таблицей:

$$\begin{array}{ll} P_1 : x_{11} = 1; & y_{11} = 0; & P_2 : x_{12} = 0; & y_{12} = 1; \\ P_3 : x_{13} = -1; & y_{13} = 0; & P_4 : x_{14} = 0; & y_{14} = -1. \end{array}$$

Если обозначить теперь расстояние $P_0 P_5$ через $1-\alpha$ (где величина α представляет собой разность между радиусами описанных, вокруг квадратов, окружностей, и, следовательно, $0 \leq \alpha \leq 1$), тогда координаты вершин меньшего квадрата $P_5 P_6 P_7 P_8$ вычисляются по ниже приведенным формулам:

$$\begin{aligned} \text{координаты вершины } P_5 : x_{21} &= \frac{(1-\alpha)\sqrt{2}}{2}; & y_{21} &= \frac{(1-\alpha)\sqrt{2}}{2}; \\ \text{координаты вершины } P_6 : x_{22} &= -\frac{(1-\alpha)\sqrt{2}}{2}; & y_{22} &= \frac{(1-\alpha)\sqrt{2}}{2}; \\ \text{координаты вершины } P_7 : x_{23} &= -\frac{(1-\alpha)\sqrt{2}}{2}; & y_{23} &= -\frac{(1-\alpha)\sqrt{2}}{2}; \end{aligned}$$

$$\text{координаты вершины } P_8 : x_{24} = \frac{(1-\alpha)\sqrt{2}}{2}; \quad y_{24} = -\frac{(1-\alpha)\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда приведенная ниже таблица содержит все взаимные расстояния между девятью материальными точками P_k , $k = 0, 1, \dots, 8$:

$$\begin{aligned} P_0P_1 &= P_0P_2 = P_0P_3 = P_0P_4 = 1; & P_0P_5 &= P_0P_6 = P_0P_7 = P_0P_8 = 1-\alpha; \\ P_1P_2 &= P_2P_3 = P_3P_4 = P_4P_1 = \sqrt{2}; & P_5P_6 &= P_6P_7 = P_7P_8 = P_8P_5 = (1-\alpha)\sqrt{2}; \\ P_1P_3 &= P_2P_4 = 2; & P_5P_7 &= P_6P_8 = 2(1-\alpha); \\ P_1P_5 &= P_1P_8 = P_2P_5 = P_2P_6 = P_3P_6 = P_3P_7 = P_4P_7 = P_4P_8 = \\ &= \sqrt{2 - \sqrt{2} - \alpha(2 - \sqrt{2}) + \alpha^2}; \\ P_1P_6 &= P_1P_7 = P_2P_8 = P_2P_5 = P_3P_5 = P_3P_8 = P_4P_6 = P_4P_5 = \\ &= \sqrt{2 + \sqrt{2} - \alpha(2 + \sqrt{2}) + \alpha^2}; \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в формулы (1.92) и (1.93), для значений $\ell = 1, 2$ и $k = 1, 2, 3, 4$, получаем для угловых скоростей ω_ℓ формально шестнадцать аналитических выражений, из которых действительно различными являются только два выражения.

Например, можно вычислить значения ω_1^2 и ω_2^2 для $\ell = 1$, $k = 1$, и $\ell = 2, k = 1$.

В результате таких вычислений получим:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= M_0 + \frac{m_1(4 + \sqrt{2})}{4\sqrt{2}} + \\ &+ m_2 \left[\frac{2 - (1-\alpha)\sqrt{2}}{[(2 - \sqrt{2})(1-\alpha) + \alpha^2]^{3/2}} + \frac{2 + (1-\alpha)\sqrt{2}}{[(2 + \sqrt{2})(1-\alpha) + \alpha^2]^{3/2}} \right], \end{aligned} \quad (1.94)$$

$$\omega_2^2 = \frac{M_0}{(1-\alpha)^3} + \frac{m_2(4+\sqrt{2})}{4\sqrt{2}(1-\alpha)^3} + \frac{m_1\sqrt{2}}{1-\alpha} \left\{ \frac{(1-\alpha)\sqrt{2}-1}{[(2-\sqrt{2})(1-\alpha)+\alpha^2]^{3/2}} + \frac{(1-\alpha)\sqrt{2}+1}{[(2+\sqrt{2})(1-\alpha)+\alpha^2]^{3/2}} \right\}. \quad (1.95)$$

Аналитические выражения (1.94) и (1.95) по виду, вообще говоря, различны и, очевидно, они совпадают, например, в случае равенства масс, $m_1 = m_2$ и нулевого значения параметра, $\alpha = 0$. Но при таких условиях, кольцеобразная динамическая модель задачи 9-ти тел переходит в уже упомянутую выше динамическую модель, а именно, в равномерное вращение правильного восьмиугольника $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ вокруг центра P_0 с угловой скоростью

$$\omega^2 = M_0 + m \frac{4\sqrt{2+\sqrt{2}} + 4\sqrt{2-\sqrt{2}} + 4 + \sqrt{2}}{4\sqrt{2}}. \quad (1.96)$$

Но это не единственная возможность удовлетворить всем написанным выше аналитическим условиям.

В работе [93] показано, что *существует и второй вариант*, с «другой конфигурацией», для которой массы различны, то есть $m_1 \neq m_2$, а параметр α отличен от нуля ($\alpha \neq 0$). Для существования такого гомографического решения, *изображенного двумя квадратами*, вращающимися с одинаковой угловой скоростью вокруг центра P_0 , необходимо, чтобы при $\alpha \neq 0$ выполнялось условие

$$\omega^2 = \omega_1^2 = \omega_2^2. \quad (1.97)$$

которое является «частью» достаточных условий существования решения, *изображенного двумя квадратами*.

Это условие выражает зависимость между массами m_1, m_2, M_0 и расстоянием α , при которой существует гомографическое решение плоской ньютоновой проблемы 9-ти тел с «неполной симметрией», то есть существует гомографическое решение, отличное от «регулярного восьмиугольника».

Равенство (1.97) может быть записано, как показал Е.Ихсанов, и в следующей явной аналитической форме

$$m_2 = m_1 \varphi_1(\alpha) + M_0 \varphi_0(\alpha) \quad (1.98)$$

где точные аналитические выражения для функций $\varphi_1(\alpha), \varphi_0(\alpha)$, приведены ниже:

$$\begin{aligned} \varphi_0(\alpha) = & 4\sqrt{(-1+\alpha)^2} \alpha (3-3\alpha+\alpha^2) \left((2-\sqrt{2}+(-2+\sqrt{2})\alpha+\alpha^2)^{3/2} \times \right. \\ & \times (2+\sqrt{2}-(2+\sqrt{2})\alpha+\alpha^2)^{3/2} / (-1+\alpha) \left(4(1-\alpha)(-1+\alpha)\sqrt{(-1+\alpha)^2} \times \right. \\ & \times (2+\sqrt{2}-\sqrt{2}\alpha)(2-\sqrt{2}+(-2+\sqrt{2})\alpha+\alpha^2)^{3/2} + 4(1-\alpha)(-1+\alpha) \times \\ & \times \sqrt{(-1+\alpha)^2} (2-\sqrt{2}+2\alpha)(2+\sqrt{2}-(2+\sqrt{2})\alpha+\alpha^2)^{3/2} + (1+2\sqrt{2}) \times \\ & \times (2-\sqrt{2}+(-2+\sqrt{2})\alpha+\alpha^2)^{3/2} (2+\sqrt{2}-(2+\sqrt{2})\alpha+\alpha^2)^{3/2} \Big), \end{aligned} \quad (1.99)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(\alpha) = & (-1+\alpha)\sqrt{(-1+\alpha)^2} \left(4\sqrt{2}(2+\sqrt{2}-2\alpha)(1-\alpha)(2-\sqrt{2}+ \right. \\ & + (-2+\sqrt{2})\alpha+\alpha^2)^{3/2} + 4\sqrt{2}(2-\sqrt{2}-2\alpha)(1-\alpha)(2+\sqrt{2}-(2+\sqrt{2})\alpha+ \\ & + \alpha^2)^{3/2} + (-4-\sqrt{2})(1-\alpha)^2(2-\sqrt{2}+(-2+\sqrt{2})\alpha+\alpha^2)^{3/2} \times \\ & \times (2+\sqrt{2}-(2+\sqrt{2})\alpha+\alpha^2)^{3/2} \Big) / \sqrt{2}(1-\alpha) \left(4(1-\alpha)(-1+\alpha)\sqrt{(-1+\alpha)^2} \times \right. \\ & \times (2+\sqrt{2}-\sqrt{2}\alpha)(2-\sqrt{2}+(-2+\sqrt{2})\alpha+\alpha^2)^{3/2} + 4(1-\alpha)(-1+\alpha) \times \\ & \times \sqrt{(-1+\alpha)^2} (2-\sqrt{2}+2\alpha)(2+\sqrt{2}-(2+\sqrt{2})\alpha+\alpha^2)^{3/2} + (1+2\sqrt{2}) \times \\ & \times (2-\sqrt{2}+(-2+\sqrt{2})\alpha+\alpha^2)^{3/2} (2+\sqrt{2}-(2+\sqrt{2})\alpha+\alpha^2)^{3/2} \Big), \end{aligned} \quad (1.100)$$

На основании анализа приведенных выше точных алгебраических соотношений между динамическими и геометрическими параметрами модели, автор сформулировал следующую теорему.

Теорема. Достаточным условием существования гомографического решения ньютоновой задачи 9-ти тел, изображаемого в виде двух вращающихся с одинаковой угловой скоростью квадратов, расположенных в одной плоскости, с угловым поворотом одного квадрата относительно другого, равным $\pi/4$, является выполнение соотношения (1.97), где, равные между собой, частоты ω_1, ω_2 выражаются формулами (1.94) и (1.95).

3) Рассмотрим теперь условия существования динамической модели – ньютоновой проблемы девяти тел, состоящей из двух ромбов (без поворота одного ромба относительно второго ромба) с общим центром притяжения, в котором находится масса m_0 . Эта динамическая модель исследована Н.И.Земцовой [97-100].

На рис. 20 такая конфигурация изображена во вращающейся около массы m_0 прямоугольной системе координат с приведенной ниже угловой скоростью (см. формулу (1.102)).

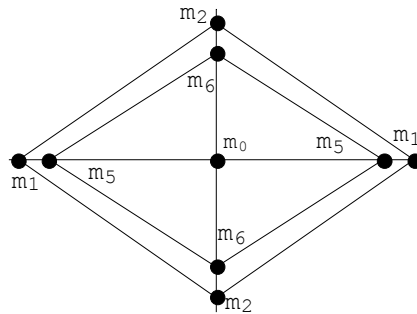


Рис. 20

Для существования такого решения, как было указано в п.1.8, необходимо и достаточно выполнение следующих условий, найденных Н.И.Земцовой:

1) массы вершин ромбов должны быть попарно равны в такой геометрии (рис. 20), если пронумеровать вершины последовательно против часовой стрелки:

$$m_1 = m_3, m_2 = m_4, m_5 = m_7, m_6 = m_8, ; \quad (1.101)$$

2) угловая скорость вращения конфигурации вокруг ее геометрического центра однозначно определяется формулой

$$\omega^2 = \frac{1}{\alpha^3} m_0 + \frac{m_1}{4\alpha^3} + \frac{2m_2}{(1+\alpha^2)^{3/2}} + \frac{4\beta \cdot m_5}{(\beta^2 - \alpha^2)^2} + \frac{2\alpha^3 m_6}{(\alpha^4 + \beta^2)^{3/2}}. \quad (1.102)$$

Здесь параметры α, β суть размеры диагоналей ромба. Приведенные выше условия являются, по меньшей мере, *достаточными* для существования описанной конфигурации.

Приведем еще одно стационарное решение ньютоновой проблемы девяти тел, также найденное Н.И.Земцовой [98,100]. Геометрически эта проблема 9-ти тел описывается концентрическими фигурами: правильным шестиугольником и равносторонним треугольником (см. рис. 21).

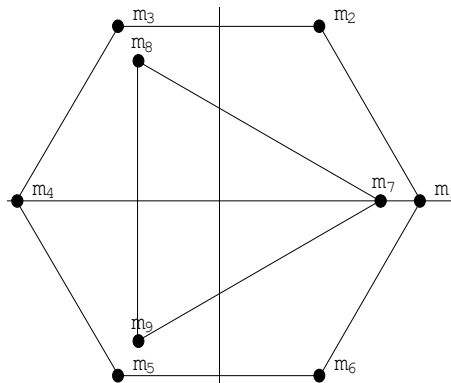


Рис. 21

Эта конфигурация является первой, описанной в математической литературе, конфигурацией с различным числом гравитирующих материальных точек на разных концентрических окружностях

(здесь на одной окружности располагается шесть гравитирующих точек, а на второй окружности – три гравитирующие точки).

Основные алгебраические соотношения, гарантирующие существование этой конфигурации, описаны в статьях [99-101]. Приведем ниже основные аналитические зависимости, гарантирующие существование такой динамической модели. Если считать, что величина радиуса, описанной около шестиугольника окружности, принята равной «единице» ($R=1$), а радиус окружности, описанной около треугольника, равен величине $\alpha \leq 1$, тогда, оказывается, что массы связаны алгебраическими соотношениями:

$$m_1 = m_3 = m_5 = m; m_2 = m_4 = m_6 = m^*, m_7 = m_8 = m_9 = m^{**}. \quad (1.103)$$

$$\begin{cases} m = (\lambda_2 + \frac{(-4 + 5\sqrt{3})\lambda_3}{\lambda_4})m^{**}, \\ m^* = \frac{\lambda_3}{\lambda_4}m^{**}, \end{cases} \quad (1.104)$$

Параметры λ_k вычисляются, согласно соотношениям

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{4\sqrt{3}}{4 - 5\sqrt{3}} \left(\frac{4\alpha}{(-1 + \alpha^2)^2} - \frac{2 - \alpha}{(1 - \alpha + \alpha^2)^{3/2}} + \frac{2 + \alpha}{(1 + \alpha + \alpha^2)^{3/2}} \right), \\ \lambda_3 &= \left(\frac{4\alpha}{(-1 + \alpha^2)^2} - \frac{2 - \alpha}{(1 - \alpha + \alpha^2)^{3/2}} + \frac{2 + \alpha}{(1 + \alpha + \alpha^2)^{3/2}} \right) \times \\ &\times \left(\frac{-1}{(-1 + \alpha^2)^2} - \frac{\alpha}{\sqrt{3}} + \frac{1 + 2\alpha}{(1 + \alpha + \alpha^2)^{3/2}} \right) + \\ &+ \frac{5\sqrt{3} - 4}{4\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}\alpha^2} - \frac{\alpha}{(\alpha - 1)^2} - \frac{\alpha(2 + \alpha)}{(1 + \alpha + \alpha^2)^{3/2}} \right), \\ \lambda_4 &= \frac{91 - 40\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \times \\ &\times \left(-\frac{(15 + 4\sqrt{3})\alpha}{12} - \frac{4\alpha}{(\alpha^2 - 1)^2} - \frac{2\alpha - 1}{(1 - \alpha + \alpha^2)^{3/2}} + \frac{2\alpha + 1}{(1 + \alpha + \alpha^2)^{3/2}} \right). \end{aligned} \quad (1.105)$$

Угловая скорость вращения конфигурации, величина ω вычисляется по точной формуле, приведенной в статье [102]:

$$\omega^2 = \frac{m_1}{\sqrt{3}} + \frac{5m_2}{4} + \frac{m_3}{(\alpha-1)^2} + \frac{m_3(2+\alpha)}{(1+\alpha+\alpha^2)^{3/2}}. \quad (1.106)$$

5) Известна также конфигурация «прямоугольник+ромб» с общим геометрическим и гравитационным центром, найденная и исследованная Д. Диаровой [103]. Она изображена на рис.20, во вращающейся системе координат, в центре которой имеется масса m_0 . Угловая скорость вращения этой системы координат относительно инерциальной системы с тем же центром вычислена автором, очевидно, с помощью системы Mathematica.

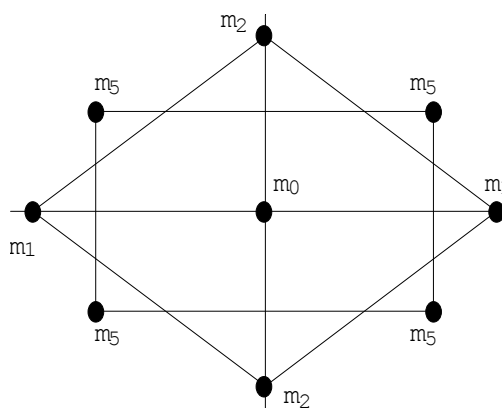


Рис. 22

Пусть величины m_1, m_2, m_3, m_4 суть массы тел в вершинах ромба, а величины m_5, m_6, m_7, m_8 — массы тел в вершинах прямоугольника.

Тогда основные соотношения между массами и зависимость угловой скорости вращения от параметров модели, гарантирующие ее существование, суть следующие [103]:

$$m_1 = m_3, \quad m_2 = m_4, \quad m_5 = m_6 = m_7 = m_8, \quad (1.107)$$

$$\begin{aligned} \omega^2 = & \frac{m_1}{4} + \frac{2m_2}{(1+\alpha^2)^{3/2}} + \\ & + 2m_5 \left(\frac{1+\beta}{((1+\beta)^2 + \gamma^2)^{3/2}} + \frac{1-\beta}{((1-\beta)^2 + \gamma^2)^{3/2}} \right), \end{aligned} \quad (1.108)$$

где $(2, 2\alpha)$ – длины диагоналей ромба, а величины β, γ характеризуют линейные размеры прямоугольника.

Представляется интересной пока не исследованная плоская конфигурация, состоящая из двух концентрических, но «ортогональных» ромбов, изображенная на рис. 23. Более того, пока не получены точные аналитические условия ее существования.

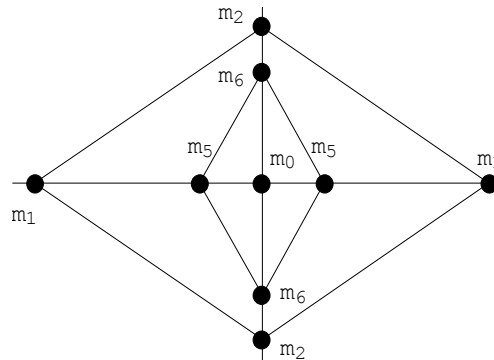


Рис. 23

Заметим лишь, что одним из предельных случаев для этой конфигурации является конфигурация «два квадрата без углового поворота одного квадрата относительно другого», для которой Е.В.Ихсановым найдены условия ее существования [93].

п.1.17. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ 10-ТИ ТЕЛ

Опишем ниже, известные в специальной литературе, следующие точные стационарные решения дифференциальных уравнений ньютоновой проблемы 10-ти тел:

1) *Правильный десятиугольник* с равными в вершинах массами, $m_1 = \dots = m_{10} = m$ и с радиусом, описанной около него, окружности, равным «единице» или, очевидно, любому числу. Его угловая скорость вращения вокруг своего центра в «не вращающейся системе координат» определяется как частный случай равенства (1.54), и она равна

$$\omega_{10}^2 = \frac{m}{4} \left(\frac{1}{\sin \frac{\pi}{10}} + \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{10}} + \frac{1}{\sin \frac{3\pi}{10}} + \frac{1}{\sin \frac{4\pi}{10}} + \frac{1}{\sin \frac{5\pi}{10}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sin \frac{6\pi}{10}} + \frac{1}{\sin \frac{7\pi}{10}} + \frac{1}{\sin \frac{8\pi}{10}} + \frac{1}{\sin \frac{9\pi}{10}} \right).$$

После упрощений и вычислений в системе “Mathematica”, получаем следующую величину

$$\omega_{10}^2 = m \left(\frac{1}{4} + \sqrt{5} + \sqrt{\frac{2}{5-\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}} \right). \quad (1.109)$$

2) *Правильный семиугольник* с равными в вершинах массами $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = m_7 = m_8 = m_9 = m$ и с произвольной, не равной нулю, массой m_0 в центре. Его угловая скорость вращения может быть также определена из общей формулы (1.54), которая в этом случае имеет очевидную аналитическую форму,

$$\omega_9^2 = m_0 + \frac{m}{4} \sum_{k=2}^9 \frac{1}{\sin(k-1)\pi/9}$$

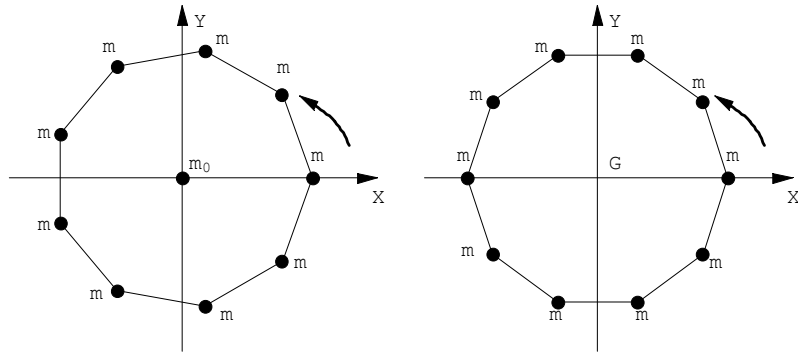


Рис. 24

3) Два concentric pentagons с углом сдвига один относительно другого, либо 0° , либо 36° .

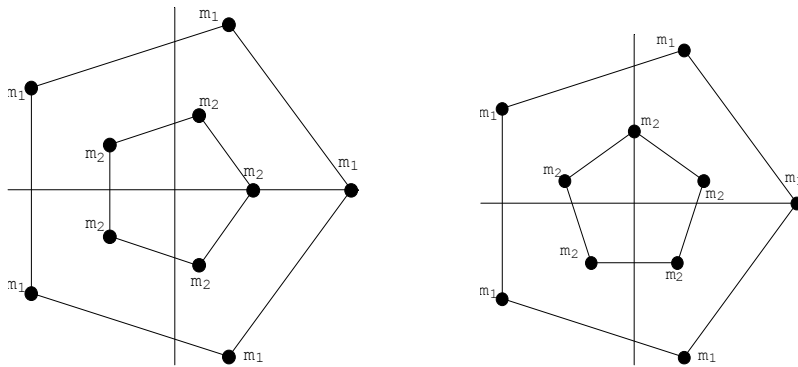


Рис. 25

Угловая скорость последней конфигурации, очевидно, может быть вычислена по формулам, приведенным в п.1.7.

4) Правильный шестиугольник, содержащий внутри себя концентрический равносторонний треугольник, с центральной массой m_0 . Проблема существования этой конфигурации и основные аналитические зависимости между ее динамическими и геометрическими параметрами, гарантирующие ее существование, исследованы Н.И.Земцовой [99-101].

Опишем более подробно эту динамическую модель.

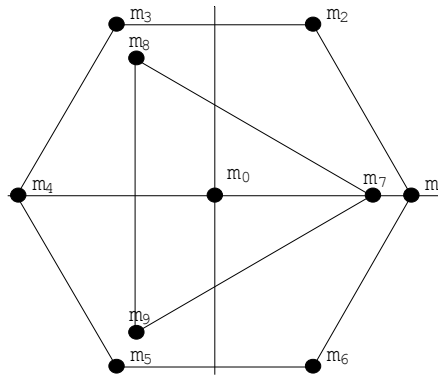


Рис. 26

Существование этой конфигурации гарантировано, если массы связаны между собой следующими соотношениями

$$m_1 = m_3 = m_5 = m_7; m_2 = m_4 = m_6 = m_8, m_7 = m_8 = m_9 = m_3, \quad (1.110)$$

$$\begin{cases} m_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_4} m_0 + (\lambda_2 + \frac{(-4 + 5\sqrt{3})\lambda_3}{\lambda_4}) m_3, \\ m_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_4} m_0 + \frac{\lambda_3}{\lambda_4} m_3, \end{cases} \quad (1.111)$$

где величины $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ приведены в п.1.14.

Величина угловой скорости вращения конфигурации вокруг своего центра определяется, согласно равенству

$$\omega^2 = m_0 + \frac{m_1}{\sqrt{3}} + \frac{5m_2}{4} + \frac{m_3}{(\alpha-1)^2} + \frac{m_3(2+\alpha)}{(1+\alpha+\alpha^2)^{3/2}}. \quad (1.112)$$

Наконец, напомним читателю о существовании еще одной динамической модели в ньютоновой проблеме 10-и тел, существование которой вытекает из основной теоремы п.1.7, на которую мы многократно ссылались.

Это – стационарное решение, геометрически изображаемое тремя, разного размера, концентрическими равносторонними треугольниками с массами $m_1=m_2=m_3=m$, $m_4=m_5=m_6=m^*$, $m_7=m_8=m_9=m^{**}$ и центральной массой m_0 . Треугольники ориентированы на плоскости таким образом, что каждый из них «повернут» относительно других на угол $\pi/3$, или конфигурация, состоящая из трех равносторонних, но разных размеров треугольников, вершины которых располагаются на трех центральных лучах.

п.1.18. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМЫ ОДИННАДЦАТИ ТЕЛ

Известны четыре стационарных решения названной динамической модели:

1) Решение, геометрически изображаемое равномерно вращающимся вокруг геометрического центра правильным одиннадцати угольником, в вершинах которого имеются равные между собой массы,

$$m_1=m_2=\dots=m_{11}=m. \quad (1.113)$$

Угловая скорость его вращения вокруг центра легко вычисляется по общей формуле (1.54) при условии, что параметр $n=11$, а масса $m_0=0$.

2) Решение, изображаемое равномерно вращающимся правильным десятиугольником вокруг своего геометрического центра, в котором находится одиннадцатая, не равная нулю, произвольная масса m_0 , а в его вершинах массы равны между собой, то есть, $m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m_6=m_7=m_8=m_9=m_{10}=m$.

3) Два решения, каждое из которых изображается двумя концентрическими правильными пятиугольниками, имеющими общий центр с массой m_0 . В одной из конфигураций отсутствует угловой поворот одного пятиугольника относительно другого, а во втором случае один из пятиугольников «повернут» относительно другого на угол $\pi/5$. Их угловые скорости вращения определяются по общим формулам, приведенным в п.1.7.

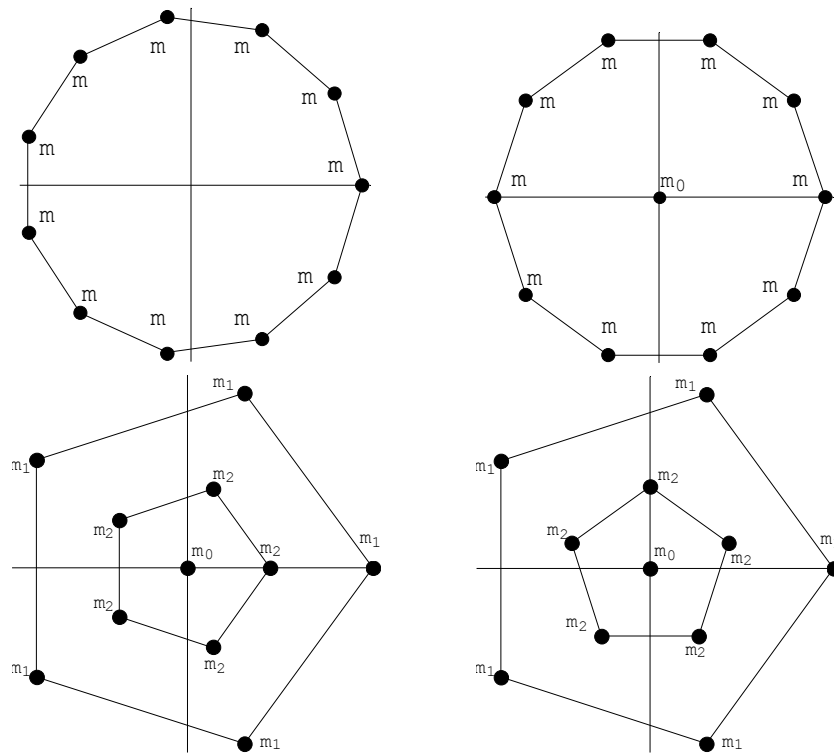


Рис. 27

Для вычисления угловых скоростей вращения первых двух конфигураций, изображенных на рис. 27, как написано выше, могут быть использованы стандартные формулы – частные случаи общей формулы (1.54), то есть имеем следующие равенства:

$$\omega_{11}^2 = \frac{m}{4} \sum_{k=2}^{11} \left(\sin \frac{\pi(k-1)}{11} \right)^{-1}, \quad (1.114)$$

$$\omega_{11}^2 = m_0 + \frac{m}{4} \sum_{k=2}^{10} \left(\sin \frac{\pi(k-1)}{10} \right)^{-1}. \quad (1.115)$$

К сожалению, преобразовать выписанные формулы до более простых «аналитико-численных» выражений, без потери точности, не удастся.

Угловые скорости вращения конфигураций, состоящих из правильных пятиугольников относительно легко можно *вычислить* по формулам из п.1.7, если априори заданы *конкретные численные значения параметров* конфигурации. В иных случаях, символьные преобразования, упрощающие, например, аналитические выражения для угловой скорости вращения конфигураций ω , при больших значениях параметра n , практически трудно реализуемы.

п.1.19. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ НЬЮТОНОВОЙ ПРОБЛЕМЫ 12-ТИ ТЕЛ

В этой динамической модели известны следующие точные частные решения, геометрические образы которых включены в рисунок 28.

Опираясь на теоремы, приведенные в п.1.7, можно заключить, что известных на сегодня стационарных решений в ньютоновой проблеме 12-ти тел достаточно много. Перечислим некоторые из них (см. рис. 29).

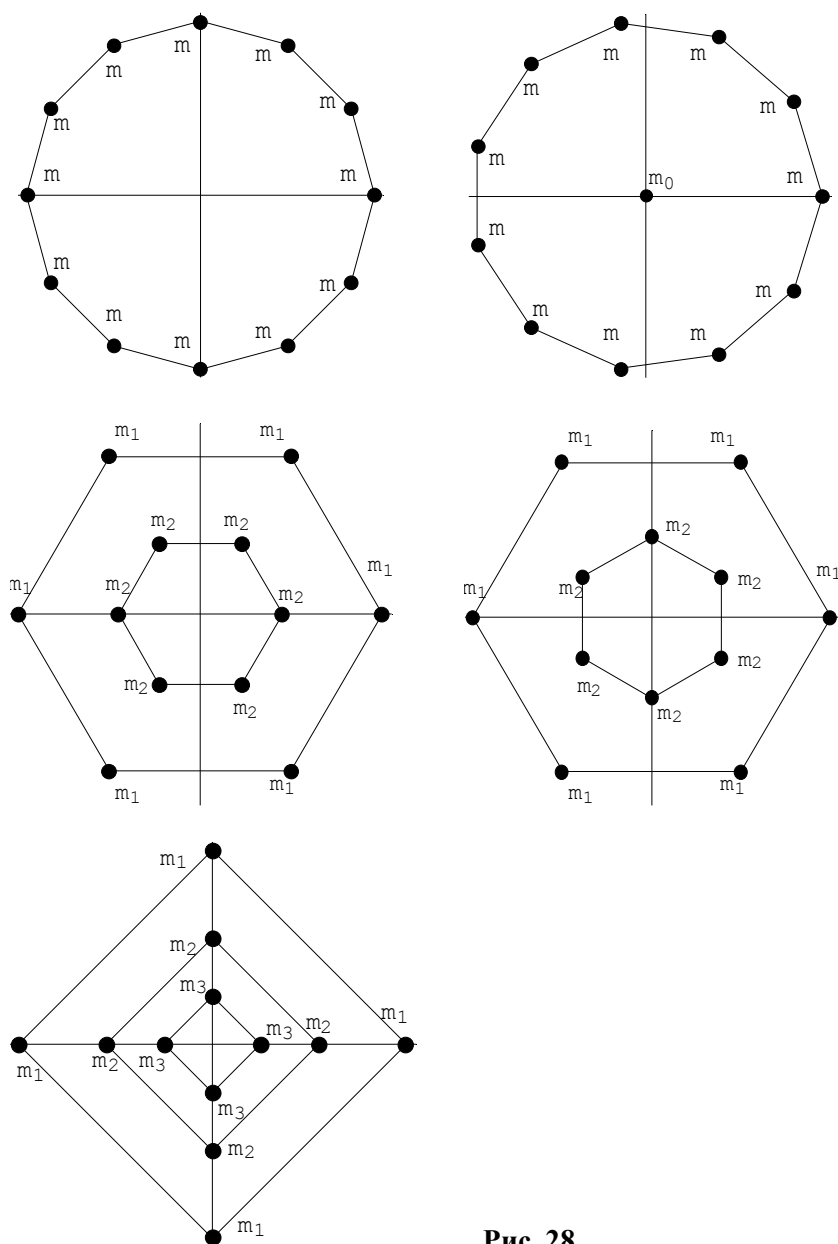


Рис. 28

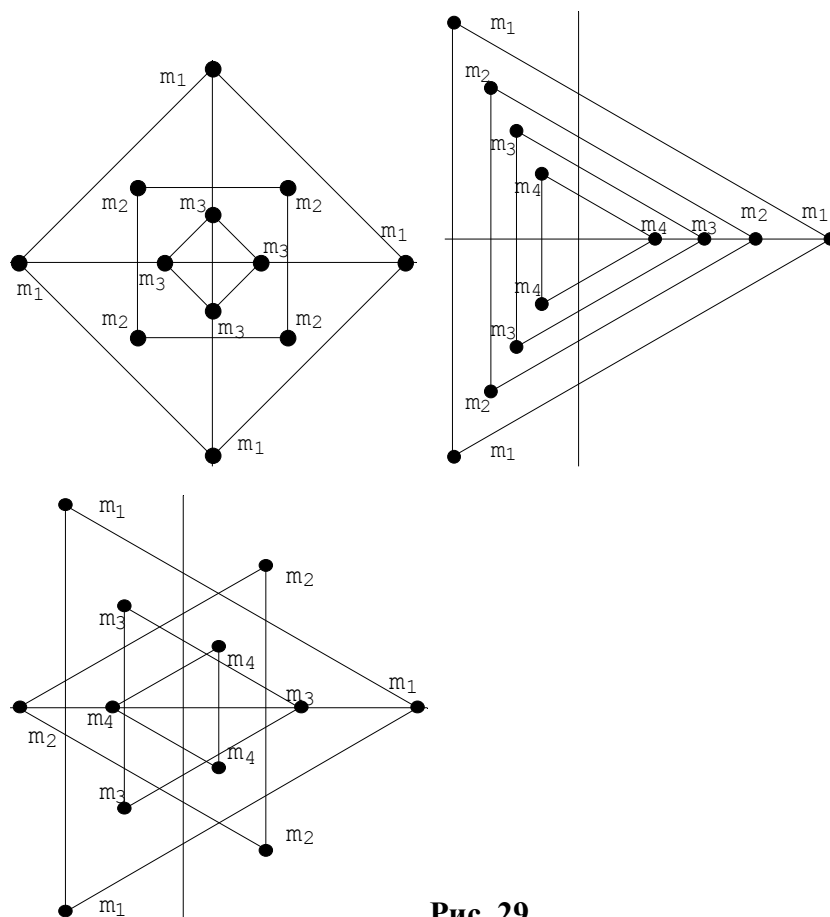


Рис. 29

1) Решение, геометрически изображаемое правильным, равномерно вращающимся вокруг своего геометрического центра, двенадцати угольником, в вершинах которого массы равны между собой, $m_1 = \dots = m_{12} = m$.

Угловая скорость вращения 12-ти угольника вокруг своего геометрического центра вычисляется по общей формуле (1.54), которая, после элементарных упрощений, с учетом того, что $n=12$, приводится к простому арифметическому выражению

$$\omega_{12}^2 = m \left(\frac{5}{4} + \frac{6 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{6}} \right) \quad (1.116)$$

2) Решение, изображаемое равномерно вращающимся правильным одиннадцати угольником с равными массами в вершинах, $m_1 = \dots = m_{11} = m$ и с произвольной массой m_0 в центре. Угловая скорость его вращения также определяется на основе формулы (1.54).

3) Решение, геометрически изображаемое двумя регулярными концентрическими шестиугольниками с угловым сдвигом один относительно другого, равным, либо 0° , либо 30° и с массами, равными, $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = m$ и $m_7 = m_8 = m_9 = m_{10} = m_{11} = m_{12} = m^*$ соответственно. Они вращаются с одинаковой угловой скоростью вокруг общего геометрического центра, с угловой скоростью, вычисляемой по формулам, приведенным в п.1.7.

4) Два варианта решений, изображаемых тремя, различными по размерам, концентрическими квадратами, с массами $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$, $m_5 = m_6 = m_7 = m_8 = m^*$ и $m_9 = m_{10} = m_{11} = m_{12} = m^{**}$, «ориентированными» каждый относительно соседних на угол $\pi/4$, и второй случай – такая же конфигурация, но без относительного углового поворота каждого из квадратов относительно других квадратов. Первый из этих двух вариантов был детально исследован в работах Д.Диаровой [103].

5) Решение в виде четырех правильных концентрических треугольников разных размеров, с углом поворота каждого относительно соседних, равным $\pi/3$ и второй случай, аналогичный первому решению, но без относительного углового поворота треугольников.

Приведем теперь подробное описание случая «трех концентрических квадратов, ориентированных один относительно другого на угол $\pi/4$ » выполненное Д. Диаровой.

Обозначим массы тел P_k через m_k , $k=0, 1, 2, \dots, 12$, и приведем ниже значения координат вершин конфигурации во вращающейся вокруг «центра» декартовой системы координат, точки P_0 .

Таблица 2. Значения координат вершин конфигурации 12-ти тел

тела	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}
x	0	1	0	-1	0	α	$-\alpha$	$-\alpha$	α	β	0	$-\beta$	0
y	0	0	1	0	-1	α	α	$-\alpha$	$-\alpha$	0	β	0	$-\beta$

Здесь положительные параметры α и β характеризуют линейные размеры конфигурации и пока являются неизвестными величинами.

Рассмотрим теперь ньютонову задачу двенадцати тел, главная конфигурация которой состоит из трех квадратов и отсутствует центральная притягивающая масса ($m_0=0$).

В ниже приведенной таблице имеется совокупность значений параметров, удовлетворяющих всем алгебраическим соотношениям, полученных в исследованиях Д. Диаровой [105], гарантирующим существование динамической модели ньютоновой проблемы 12-ти тел, состоящей из трех квадратов.

Таблица 3. Значения параметров модели в задаче 12-ти тел

№	α	β	m_0	m_1	m_5	m_9	ω^2
1	2.0	3.0	0	0.05	0.136320	0.134693	0.024183
2	2.1	3.2	0	0.10	0.340824	0.336898	0.047057
3	2.3	3.2	0	0.10	0.358255	0.387179	0.044033
4	2.4	3.2	0	0.10	0.371051	0.408884	0.042680
5	2.5	3.2	0	0.10	0.382780	0.430632	0.041340
6	2.6	3.2	0	0.10	0.389737	0.453697	0.039982
7	2.7	3.2	0	0.10	0.386293	0.479467	0.038585
8	2.8	3.2	0	0.10	0.362895	0.509935	0.037128
9	2.9	3.2	0	0.10	0.301477	0.548626	0.035571
10	3.0	3.2	0	0.10	0.163017	0.603010	0.033832

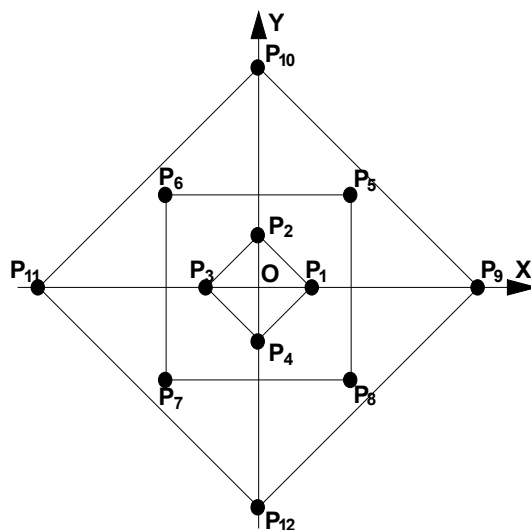


Рис. 30

Свои результаты Д. Диарова сформулировала в виде теорем, одну из которых мы приводим ниже.

Теорема. *На положительной числовой полуоси $\mathbf{R}(0,+\infty)$ имеются значения динамических и геометрических параметров ньютоновой проблемы двенадцати тел, которые гарантируют существование центральной конфигурации в виде трех concentric squares, ориентированных друг относительно друга на угол $\pi/4$ и вращающихся как единое целое в инерциальной плоской системе координат со скоростью, однозначно определяемой динамическими и геометрическими параметрами конфигурации.*

п.1.20. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ НЬЮТОНОВОЙ ПРОБЛЕМЫ БОЛЬШЕГО ЧИСЛА ТЕЛ

Вполне корректным является утверждение о том, что для *любого целого числа n всегда существуют*, по меньшей мере, *две центральные конфигурации*, геометрически изображаемые регулярными многоугольниками.

Это правильный выпуклый n -угольник и правильный выпуклый $(n-1)$ -угольник с *неравной нулю массой* ($m_0 \neq 0$) в его геометрическом центре. Правильный n -угольник должен иметь равные массы в вершинах, $m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$, а *правильный $(n-1)$ -угольник с центральной массой m_0* также должен иметь равные между собой массы в вершинах, $m_1 = m_2 = \dots = m_{n-1} = m$. Естественно, следует ожидать, что для больших значений параметра n , количество центральных конфигураций может быть значительно больше двух.

В качестве примера, приводим ниже конфигурации, известные сегодня в ньютоновых проблемах тринадцати и девятнадцати тел.

Изложим теперь необходимые и достаточные условия, гарантирующие существование описанной конфигурации, выраженное точными алгебраическими зависимостями между динамическими и геометрическими параметрами проблемы 13-ти тел, изображенной тремя квадратами с *неравной нулю массой* в их общем геометрическом центре. Эти результаты также получены Д. Дидаровой.

Из двадцати четырех нелинейных алгебраических уравнений, вытекающих из теоремы Эльмабсута, приведенной в п.1.7, гарантирующих существование заданных центральных конфигураций и связывающих между собой координаты и угловые скорости тел $P_1, P_2, \dots, P_{12}$, действительно независимыми являются только три соотношения. Они выражают аналитическую связь трех угловых скоростей $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ с другими параметрами модели.

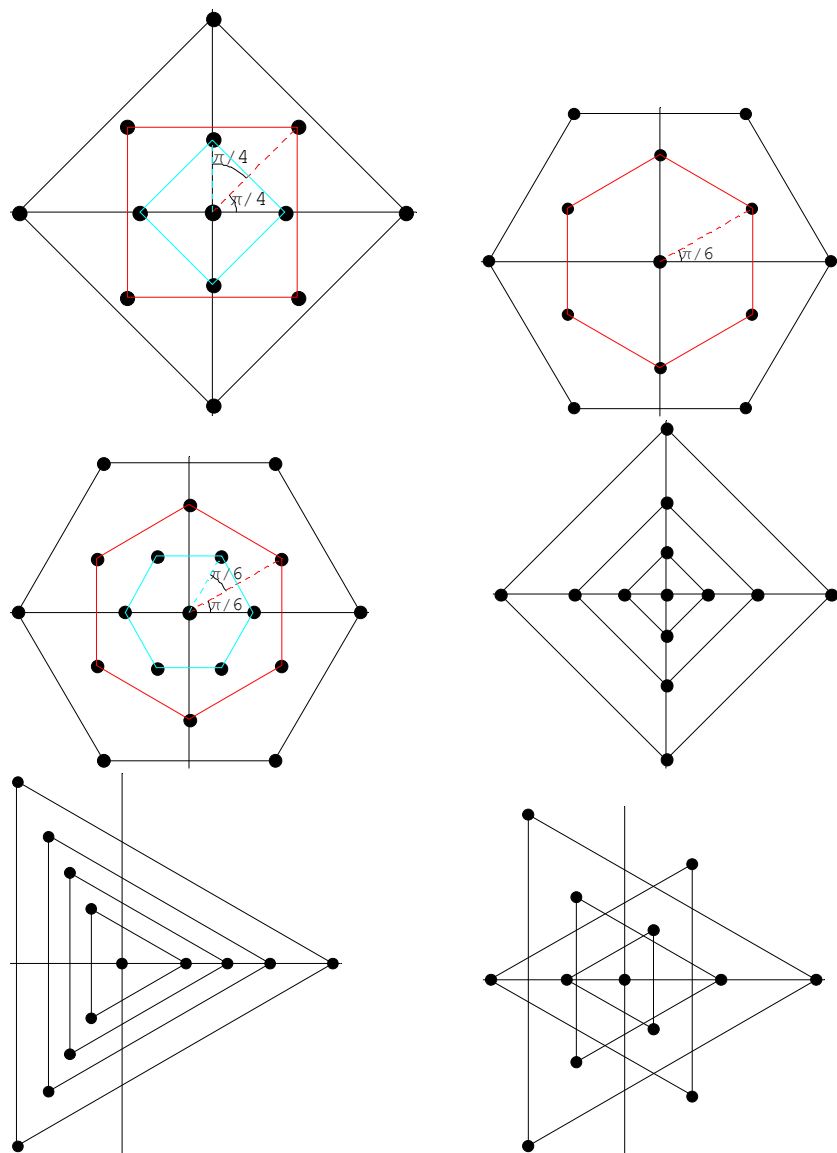


Рис. 31

Эти три соотношения имеют вид [105]:

$$\begin{aligned}\omega_1^2 = m_0 + \frac{1+2\sqrt{2}}{4} m_1 + 2 \left(\frac{\alpha+1}{((\alpha+1)^2 + \alpha^2)^{3/2}} - \frac{\alpha-1}{((\alpha-1)^2 + \alpha^2)^{3/2}} \right) m_5 + \\ + \left(\frac{1}{(\beta+1)^2} - \frac{1}{(\beta-1)^2} + \frac{2}{(\beta^2+1)^{3/2}} \right) m_9 ,\end{aligned}\quad (1.117)$$

$$\begin{aligned}\omega_2^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}\alpha^3} m_0 + \left(\frac{1}{((\alpha+1)^2 + \alpha^2)^{3/2}} + \frac{\alpha+1}{\alpha((\alpha+1)^2 + \alpha^2)^{3/2}} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha-1}{\alpha((\alpha-1)^2 + \alpha^2)^{3/2}} + \frac{1}{((\alpha-1)^2 + \alpha^2)^{3/2}} \right) m_1 + \\ + \frac{4+\sqrt{2}}{16\alpha^3} m_5 + \left(\frac{1}{((\alpha+\beta)^2 + \alpha^2)^{3/2}} + \frac{\alpha+\beta}{\alpha((\alpha+\beta)^2 + \alpha^2)^{3/2}} + \right. \\ \left. + \frac{\alpha-\beta}{\alpha((\alpha-\beta)^2 + \alpha^2)^{3/2}} + \frac{1}{((\alpha-\beta)^2 + \alpha^2)^{3/2}} \right) m_9\end{aligned}\quad (1.118)$$

$$\begin{aligned}\omega_3^2 = \frac{1}{\beta^3} m_0 + \left(\frac{1}{\beta(\beta+1)^2} + \frac{1}{\beta(\beta-1)^2} + \frac{2}{(\beta^2+1)^{3/2}} \right) m_1 + \\ + 2 \left(\frac{\alpha+\beta}{\beta((\alpha+\beta)^2 + \alpha^2)^{3/2}} - \frac{\alpha-\beta}{\beta((\alpha-\beta)^2 + \alpha^2)^{3/2}} \right) m_5 + \\ + \frac{1+2\sqrt{2}}{4\beta^3} m_9 .\end{aligned}\quad (1.119)$$

Учитывая, что для выписанных выше **квадратов угловых скоростей, должно выполняться тождественное равенство между ними**, в конечном итоге получаем следующую систему ра-

венств, состоящую из двух нелинейных алгебраических уравнений с пятью положительными параметрами α , β , m_1 , m_5 , m_9 , приведенную ниже:

$$\begin{aligned}
& 2 \left(\frac{\alpha+1}{\alpha((\alpha+1)^2 + \alpha^2)^{3/2}} - \frac{\alpha-1}{\alpha((\alpha-1)^2 + \alpha^2)^{3/2}} - \frac{4+\sqrt{2}}{32\alpha^3} \right) m_5 + \\
& + \left(\frac{1}{(\beta+1)^2} - \frac{1}{(\beta-1)^2} + \frac{2}{(\beta^2+1)^{3/2}} - \frac{1}{((\alpha+\beta)^2 + \alpha^2)^{3/2}} - \right. \\
& \left. - \frac{\alpha+\beta}{\alpha((\alpha+\beta)^2 + \alpha^2)^{3/2}} - \frac{\alpha-\beta}{\alpha((\alpha-\beta)^2 + \alpha^2)^{3/2}} - \frac{1}{((\alpha-\beta)^2 + \alpha^2)^{3/2}} \right) m_9 = \\
& = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}\alpha^3} - 1 \right) m_0 + \left(\frac{1}{((\alpha+1)^2 + \alpha^2)^{3/2}} + \frac{\alpha+1}{\alpha((\alpha+1)^2 + \alpha^2)^{3/2}} + \right. \\
& \left. + \frac{\alpha-1}{\alpha((\alpha-1)^2 + \alpha^2)^{3/2}} + \frac{1}{((\alpha-1)^2 + \alpha^2)^{3/2}} - \frac{1+2\sqrt{2}}{4} \right) m_1, \tag{1.120}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \left(\frac{\alpha+1}{\alpha((\alpha+1)^2 + \alpha^2)^{3/2}} - \frac{\alpha-1}{\alpha((\alpha-1)^2 + \alpha^2)^{3/2}} - \right. \\
& \left. - \frac{\alpha+\beta}{\beta((\alpha+\beta)^2 + \alpha^2)^{3/2}} + \frac{\alpha-\beta}{\beta((\alpha-\beta)^2 + \alpha^2)^{3/2}} \right) m_5 + \\
& + \left(\frac{1}{(\beta+1)^2} - \frac{1}{(\beta-1)^2} + \frac{2}{(\beta^2+1)^{3/2}} - \frac{1+2\sqrt{2}}{4\beta^3} \right) m_9 = \\
& = \left(\frac{1}{\beta^3} - 1 \right) m_0 + \left(\frac{1}{\beta(\beta+1)^2} + \frac{1}{\beta(\beta-1)^2} + \frac{2}{(\beta^2+1)^{3/2}} - \frac{1+2\sqrt{2}}{4} \right) m_1. \tag{1.121}
\end{aligned}$$

Если считать, что центральная масса $m_0=1$, тогда система равенств (1.120) и (1.121) содержит два геометрических параметра, α , β и три динамических параметра m_1 , m_5 , m_9 . Поэтому, если в дальнейшем будем считать, что величины α , β , m_1 являются произвольными, но заданными параметрами, тогда величины m_5 , m_9 в приведенных выше уравнениях, следует считать неизвестными величинами. Используя систему “Mathematica”, мы нашли решения системы уравнений (1.120), (1.121) и величину угловой скорости вращения (точнее ее квадрата, величину ω^2), которые приведены в следующей таблице.

Таблица 4. Значения параметров моделей в задаче 13-ти тел

№	α	β	M_1	m_5	M_9	ω^2
1	1.2	2.4	0.10	2.875012	1.071232	0.928822
2	1.2	2.4	0.15	3.233578	0.958545	1.032190
3	1.2	2.4	0.20	3.592144	0.845858	1.135558
4	1.2	2.4	0.25	3.950710	0.733170	1.238927
5	1.2	2.4	0.30	4.309276	0.620482	1.342295
6	1.2	2.4	0.40	5.026409	0.395108	1.549031
7	1.2	2.4	0.50	5.743541	0.169733	1.755768
8	1.5	2.0	0.05	0.676375	0.871532	0.394421
9	1.5	2.0	0.10	0.569228	0.916089	0.416129
10	1.5	2.0	0.15	0.462080	0.960646	0.437836
11	1.5	2.0	0.20	0.354933	1.005204	0.459544
12	1.5	2.0	0.25	0.247786	1.049761	0.481252
13	1.5	2.0	0.30	0.140639	1.094318	0.502959
14	1.5	2.0	0.35	0.033491	1.138875	0.524667
15	1.2	2.4	0.05	2.516445	1.183920	0.825454
16	2.5	3.5	0.05	6.216575	6.058585	0.423219

Каждая строка приведенной таблицы содержит такие наборы значений параметров, которые гарантируют существование точного частного решения дифференциальных уравнений в ньютоновой проблеме тринадцати тел, имеющего конфигурацию, состоящую из трех concentрических квадратов, ориентированных друг относительно друга на угол $\pi/4$ и вращающуюся в инерциальной декартовой системе координат с угловой скоростью, приведенной в последнем столбце последней таблицы.

п.1.21. КРАТКОЕ ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обратим еще раз внимание читателя на то, что при **поиске точных стационарных решений типа «положений равновесия»** дифференциальных уравнений известной ньютоновой проблемы *$n > 2$ тел*, нигде не были использованы математический аппарат бесконечных рядов или метод итераций. Мы многократно подчеркивали, что в процессе изложения содержания книги, это стало возможным, благодаря использованию возможностей, которые предоставляет пользователю Система Символьных Вычислений «Mathematica» [1,2].

Сформулированная во Введении проблема была сведена, в конечном счете, к решению компактных нелинейных систем алгебраических уравнений вида (1.36) или (1.38), *при выводе и при решении которых мы максимально использовали методы компьютерной алгебры.*

ГЛАВА 2. ОГРАНИЧЕННЫЕ НЬЮТОНОВЫ ПРОБЛЕМЫ МНОГИХ ТЕЛ

п.2.1. ПРОБЛЕМА КОРРЕКТНОСТИ ВЫВОДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ПРОБЛЕМЫ ТРЕХ ТЕЛ

Исследуемые в книге динамические модели, как правило, описываются нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями, поэтому их решение и исследование, как правило, строится на основе *методов последовательных приближений*, реализованных в различных итерационных алгоритмах.

Отсутствие существенных успехов у математиков и астрономов на протяжении двух столетий в деле точного интегрирования дифференциальных уравнений ньютоновой проблемы трех тел, которая служит основной математической моделью для описания движений тел Солнечной системы, в конечном счете привело, в 60-х годах 19-го столетия, немецкого математика и механика Карла Густава Якоби к *формулировке новой, упрощенной математической модели космической динамики, названной им ограниченной проблемой трех тел* [10,27].

Названная проблема стала весьма популярной математической моделью космической динамики, поэтому представляется интересным изложить основные достижения, полученные в результате ее исследований.

Кроме того, мы продемонстрируем, что она допускает простое обобщение на случай любого числа взаимно гравитирующих тел, что представляет особый интерес для математиков, механиков и астрономов.

Формулировка Якоби названной проблемы, выглядит следующим образом: Необходимо исследовать движения в трехмерном пространстве материальной точки с бесконечно малой массой, притягиваемой двумя другими материальными точками с конеч-

ными по величине массами, согласно закону гравитации Ньютона. Сама бесконечно малая масса не оказывает гравитационного влияния на движение двух других материальных точек с ненулевыми массами.

Так как эти две материальные точки не подвергаются гравитационному влиянию со стороны третьей, бесконечно малой массы, их движение в трехмерном пространстве происходит в соответствии с законами планетных движений Кеплера, а бесконечно малая масса μ , в свою очередь, движется в пространстве под действием сил ньютоновского притяжения, создаваемого двумя материальными точками с массами m_1 и m_2 .

Математическое решение ограниченной задачи трех тел состоит в нахождении точного решения конкретной нелинейной системы дифференциальных уравнений шестого порядка, в которой неизвестными функциями являются координаты и проекции скорости бесконечно малой массы μ , как функции времени, то есть в исследовании всевозможных движений малой массы μ в трехмерном евклидовом пространстве под действием притяжения частиц с массами m_1 и m_2 .

Следовательно, математическая трактовка решения ограниченной ньютоновой проблемы трех тел состоит в определении и исследовании всевозможных свойств решений следующей **неавтономной нелинейной системы** обыкновенных дифференциальных уравнений 6-го порядка [27]:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_0}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_0} = \sum_{k=1}^2 m_k \frac{x_k - x_0}{\Delta_{ko}^3}, \\ \frac{d^2 y_0}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_0} = \sum_{k=1}^2 m_k \frac{y_k - y_0}{\Delta_{ko}^3}, \\ \frac{d^2 z_0}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_0} = \sum_{k=1}^2 m_k \frac{z_k - z_0}{\Delta_{ko}^3}, \end{cases} \quad (2.1)$$

В системе уравнений (2.1) неизвестными функциями времени являются координаты «нулевой» массы, то есть величины $x_0(t)$, $y_0(t)$, $z_0(t)$, а координаты гравитирующих масс m_1 и m_2 , величины $x_k(t), y_k(t), z_k(t)$, $k=1,2$ полностью определяются дифференциальными уравнениями *ньютоновой задачи двух тел*, и, следовательно, *априори они считаются известными функциями времени*.

Слова «ньютонова проблема» в названии динамической модели говорят о том, что силы взаимной гравитации определяются в соответствии с законом всемирного тяготения Ньютона.

Часто возникают дискуссии относительно *правомерности* и *законности* написания самих дифференциальных уравнений (2.1), поэтому представляется целесообразным изложить некоторые соображения *в пользу математической корректности* вывода этих уравнений.

Пусть имеется в трехмерном евклидовом пространстве инерциальная система декартовых координат, $Oxyz$, в которой существуют взаимно притягивающие друг друга по закону Ньютона три материальные точки $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ с массами $\mu = m_0, m_1$ и m_2 соответственно (рис. 32).

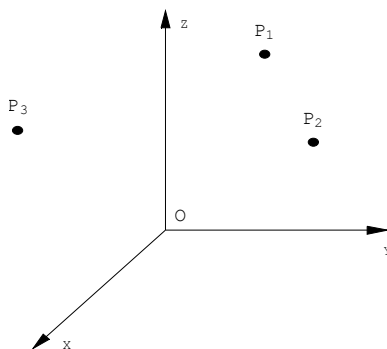


Рис. 32

Хорошо известно [27], что *движения этих материальных точек* в инерциальном декартовом пространстве $Oxyz$ полностью

определяются законом ньютоновской гравитации и описываются системой дифференциальных уравнений 18-го порядка, векторная форма которой весьма проста (см. уравнения (1.5)):

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \text{grad}_i U, \quad i = 0, 1, 2, \quad (2.2)$$

Здесь скалярная функция U представляет собой ньютоновский потенциал задачи 3-х тел и она хорошо известна [27]:

$$U(x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^2 \sum_{i=0}^2 / \frac{m_k m_i}{\Delta_{ki}}, \quad (2.3)$$

$$\Delta_{ki} = \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2},$$

где знак "штрих" при сумме (2.3) означает, что $k \neq i$.

Оператор «градиент» любой скалярной дифференцируемой функции определяется классическим равенством:

$$\text{grad}_i U = \vec{i} \frac{\partial U}{\partial x_i} + \vec{j} \frac{\partial U}{\partial y_i} + \vec{k} \frac{\partial U}{\partial z_i}. \quad (2.4)$$

Как всегда, символы $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ суть *единичные векторы* на осях координат Ox, Oy, Oz соответственно.

Дифференциальные уравнения (2.1), в подробной записи, представляются системой обыкновенных дифференциальных уравнений 18-го порядка, записанной в виде трех взаимно зависимых друг от друга подсистем обыкновенных дифференциальных уравнений (2.5) и (2.6):

$$\left\{ \begin{array}{l} m_0 \frac{d^2 x_0}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_0}, \\ m_0 \frac{d^2 y_0}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_0}, \\ m_0 \frac{d^2 z_0}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_0}, \end{array} \right. \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_1}, & m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_2}, \\ m_{i1} \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_1}, & m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_2}, \\ m_1 \frac{d^2 z_1}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_1}, & m_2 \frac{d^2 z_2}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_2}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Напишем теперь дифференциальные уравнения ограниченной задачи трех тел [27,80] с учетом некоторых соображений, которые делают вывод этих уравнений математически корректным.

Идея состоит в том, что при выводе дифференциальных уравнений ограниченной проблемы трех тел следует корректно применять *очередность операции* «обнуления» какой – либо величины, например, обнуления одной из масс, и операции деления на эту же величину. И, наоборот, следует ожидать, что реализация сначала операции деления на некоторый параметр и, после этого, его «обнуление», может привести к тому, что окончательные результаты будут различными.

Правила выполнения этих двух математических операций, очевидно, *не всегда являются эквивалентными операциями*, и по этой причине, для *корректного вывода дифференциальных уравнений ограниченной задачи трех тел*, следует осуществить следующую, единственно правильную последовательность математических операций.

На первом шаге следует сократить в левых и в правых частях уравнений (2.5)-(2.6), там, где это возможно, множители – массы тел m_0, m_1, m_2 .

В результате этого получим следующую совместную систему дифференциальных уравнений 18-го порядка (2.7) – (2.9):

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_0}{dt^2} = \frac{1}{m_0} \frac{\partial U}{\partial x_0} = m_1 \frac{x_1 - x_0}{\Delta_{10}^3} + m_2 \frac{x_2 - x_0}{\Delta_{20}^3}, \\ \frac{d^2 y_0}{dt^2} = \frac{1}{m_0} \frac{\partial U}{\partial y_0} = m_1 \frac{y_1 - y_0}{\Delta_{10}^3} + m_2 \frac{y_2 - y_0}{\Delta_{20}^3}, \\ \frac{d^2 z_0}{dt^2} = \frac{1}{m_0} \frac{\partial U}{\partial z_0} = m_1 \frac{z_1 - z_0}{\Delta_{10}^3} + m_2 \frac{z_2 - z_0}{\Delta_{20}^3}, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{1}{m_1} \frac{\partial U}{\partial x_1} = m_0 \frac{x_0 - x_1}{\Delta_{10}^3} + m_2 \frac{x_0 - x_2}{\Delta_{20}^3}, \\ \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{1}{m_1} \frac{\partial U}{\partial y_1} = m_0 \frac{y_0 - y_1}{\Delta_{10}^3} + m_2 \frac{y_0 - y_2}{\Delta_{20}^3}, \\ \frac{d^2 z_1}{dt^2} = \frac{1}{m_1} \frac{\partial U}{\partial z_1} = m_0 \frac{z_0 - z_1}{\Delta_{10}^3} + m_2 \frac{z_0 - z_2}{\Delta_{20}^3}, \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{1}{m_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} = m_0 \frac{x_0 - x_2}{\Delta_{20}^3} + m_1 \frac{x_0 - x_1}{\Delta_{10}^3}, \\ \frac{d^2 y_2}{dt^2} = \frac{1}{m_2} \frac{\partial U}{\partial y_2} = m_0 \frac{y_0 - y_2}{\Delta_{20}^3} + m_1 \frac{y_0 - y_1}{\Delta_{10}^3}, \\ \frac{d^2 z_2}{dt^2} = \frac{1}{m_2} \frac{\partial U}{\partial z_2} = m_0 \frac{z_0 - z_2}{\Delta_{20}^3} + m_1 \frac{z_0 - z_1}{\Delta_{10}^3}. \end{cases} \quad (2.9)$$

Запись дифференциальных уравнений проблемы трех тел именно в форме (2.7)-(2.9) показывает, что в левых частях уравнений *параметры-массы отсутствуют*, а их правые части являются аналитическими функциями именно этих параметров, то есть масс m_0, m_1, m_2 .

Для удобства заменим в этих уравнениях массу m_0 на величину μ , чтобы подчеркнуть ее «малость» по сравнению с другими двумя массами и сократим массы всюду, где это возможно.

Только после выполнения этих математических действий, в уравнениях, содержащих в явном виде величину μ , следует положить ее равной нулю.

В результате этих преобразований система (2.7)-(2.9) распадается на две независимые друг от друга подсистемы обыкновенных дифференциальных уравнений. Одна подсистема – это уравнения (2.10), вторая подсистема – это дифференциальные уравнения (2.11) и (2.12):

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_0}{dt^2} = \frac{1}{m_0} \frac{\partial U}{\partial x_0} = m_1 \frac{x_1 - x_0}{\Delta_{10}^3} + m_2 \frac{x_2 - x_0}{\Delta_{20}^3}, \\ \frac{d^2 y_0}{dt^2} = \frac{1}{m_0} \frac{\partial U}{\partial y_0} = m_1 \frac{y_1 - y_0}{\Delta_{10}^3} + m_2 \frac{y_2 - y_0}{\Delta_{20}^3}, \\ \frac{d^2 z_0}{dt^2} = \frac{1}{m_0} \frac{\partial U}{\partial z_0} = m_1 \frac{z_1 - z_0}{\Delta_{10}^3} + m_2 \frac{z_2 - z_0}{\Delta_{20}^3}, \end{cases} \quad (2.10)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{1}{m_1} \frac{\partial U}{\partial x_1} = m_2 \frac{x_2 - x_1}{\Delta_{12}^3}, \\ \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{1}{m_1} \frac{\partial U}{\partial y_1} = m_2 \frac{y_2 - y_1}{\Delta_{12}^3}, \\ \frac{d^2 z_1}{dt^2} = \frac{1}{m_1} \frac{\partial U}{\partial z_1} = m_2 \frac{z_2 - z_1}{\Delta_{12}^3}, \end{cases} \quad (2.11)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_2}{dt^2} = \frac{1}{m_2} \frac{\partial U}{\partial x_2} = m_1 \frac{x_2 - x_1}{\Delta_{21}^3}, \\ \frac{d^2 y_2}{dt^2} = \frac{1}{m_2} \frac{\partial U}{\partial y_2} = m_1 \frac{y_2 - y_1}{\Delta_{21}^3}, \\ \frac{d^2 z_2}{dt^2} = \frac{1}{m_2} \frac{\partial U}{\partial z_2} = m_1 \frac{z_2 - z_1}{\Delta_{21}^3}. \end{cases} \quad (2.12)$$

В правой части системы дифференциальных уравнений шестого порядка (2.10), соответствующей значению индекса $i = 0$, присутствуют координаты притягивающих точек P_1 и P_2 , то есть присутствуют величины $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ и их массы m_1, m_2 , а в подсистемах (2.11), (2.12), имеющих вместе 12-й порядок, *не присутствуют координаты «малой» массы*, величины x_0, y_0, z_0 , так как они исчезают из уравнений вместе из-за обнуления параметра μ , ($\mu = 0$).

Следовательно, вторая подсистема 12-го порядка, то есть дифференциальные уравнения (2.11) и (2.12) вместе описывают две ньютоновы задачи двух тел относительно их общего центра масс и, следовательно, их решения хорошо известны [27].

Благодаря этому обстоятельству, мы вправе считать, что в первой подсистеме дифференциальных уравнений шестого порядка (2.10) *координаты точек P_1 и P_2 являются известными функциями времени* и, следовательно, эту подсистему можно исследовать отдельно от уравнений, описывающих движения притягивающих масс m_1 и m_2 .

В конечном итоге система дифференциальных уравнений, описывающая движения бесконечно малой массы μ , принимает вид «замкнутой», но неавтономной системы дифференциальных уравнений, зависящей только от ее координат, то есть величин x_0, y_0, z_0 и от времени t , посредством шести «известных» функций $x_1(t), x_2(t), \dots, z_2(t)$:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_0}{dt^2} = \frac{1}{m_0} \frac{\partial U}{\partial x_0} = m_1 \frac{x_1(t) - x_0}{\Delta_{10}^3} + m_2 \frac{x_2(t) - x_0}{\Delta_{20}^3}, \\ \frac{d^2 y_0}{dt^2} = \frac{1}{m_0} \frac{\partial U}{\partial y_0} = m_1 \frac{y_1(t) - y_0}{\Delta_{10}^3} + m_2 \frac{y_2(t) - y_0}{\Delta_{20}^3}, \\ \frac{d^2 z_0}{dt^2} = \frac{1}{m_0} \frac{\partial U}{\partial z_0} = m_1 \frac{z_1(t) - z_0}{\Delta_{10}^3} + m_2 \frac{z_2(t) - z_0}{\Delta_{20}^3}, \end{cases} \quad (2.13)$$

Следовательно, если считать величины $x_1(t), y_1(t), z_1(t), x_2(t), y_2(t), z_2(t)$ известными функциями времени, неавтономная система

дифференциальных уравнений (2.13), описывающая динамику бесконечно малой массы μ в динамической модели – ограниченной проблеме 3-х тел, допускает отдельного исследования.

Именно этой проблемой и занимались на протяжении длительного промежутка времени многие выдающиеся математики и физики [11,27].

Если заранее допустить, что, в начальный момент времени $t = 0$, аппликаты материальных точек и их производные равны нулю, то есть величины $z_0 = z_1 = z_2 = 0$, $\frac{dz_0}{dt} = \frac{dz_1}{dt} = \frac{dz_2}{dt} = 0$, тогда мы имеем плоскую ограниченную ньютонову проблему трех тел, дифференциальные уравнения которой записываются в виде следующей системы нелинейных дифференциальных уравнений 4-го порядка:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_0}{dt^2} = \frac{1}{m_0} \frac{\partial U}{\partial x_0} = m_1 \frac{x_1(t) - x_0}{\Delta_{10}^3} + m_2 \frac{x_2(t) - x_0}{\Delta_{20}^3}, \\ \frac{d^2 y_0}{dt^2} = \frac{1}{m_0} \frac{\partial U}{\partial y_0} = m_1 \frac{y_1(t) - y_0}{\Delta_{10}^3} + m_2 \frac{y_2(t) - y_0}{\Delta_{20}^3}. \end{cases} \quad (2.14)$$

К сожалению, система (2.14), с точки зрения интегрируемости, то есть нахождения ее общего решения [23,24], такая же непрístupная, как и ее пространственный вариант (2.13), поскольку до настоящего времени не найден ее общий интеграл.

п.2.2. КОММЕНТАРИИ К ОГРАНИЧЕННОЙ ПРОБЛЕМЕ ТРЕХ ТЕЛ

После упомянутой работы Якоби [10], ограниченная проблема трех тел стала весьма популярной среди астрономов и математиков. По количеству публикаций она занимает одно из первых мест в библиографических списках научной литературы, чему, конечно, способствовала и «космическая эра» – одно из наиболее масштабных научно-технических достижений человечества второй половины 20-го столетия.

Изложим наиболее существенные математические результаты, относящиеся к этой классической модели космической динамики и начнем с классификации динамических моделей, основанной на свойствах траекторий проблемы двух тел.

Известно [27], что любая траектория ньютоновой задачи двух тел является «коническим сечением», то есть она представляется кривой 2-го порядка: *либо эллипсом (в частности, окружностью), либо гиперболой, либо параболой.*

На основе этого факта в специальной литературе сформулированы три различные ограниченные проблемы трех тел:

- 1) *ограниченная эллиптическая задача трех тел, частным случаем которой является **ограниченная круговая задача трех тел**;*
- 2) *ограниченная гиперболическая задача трех тел;*
- 3) *ограниченная параболическая задача трех тел.*

Наиболее популярной среди этих динамических моделей является *ограниченная круговая задача трех тел*, которой посвящено большое количество публикаций во многих изданиях и на различных языках, среди которых, естественно, доминируют статьи и монографии на английском и русском языках [11,27, 46,58].

Опишем более подробно эту динамическую модель.

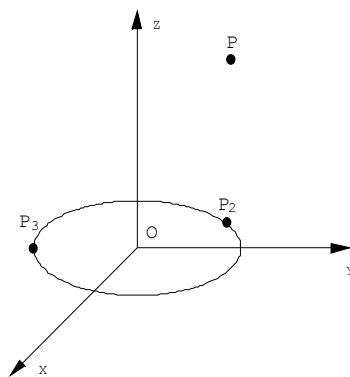


Рис. 33

Предположим, что в координатной плоскости Oxy трехмерного декартова пространства $Oxyz$ (рис. 31) по круговой орбите вокруг общего центра масс движутся две взаимно притягивающие друг друга по закону Ньютона материальные точки P_1 и P_2 с массами m_1 и m_2 соответственно. Эти материальные точки создают в каждой точке трехмерного пространства $Oxyz$ ньютоново гравитационное поле, в котором движется третья точка P с бесконечно малой массой μ .

Формулировка проблемы. *Ограниченная круговая проблема трех тел состоит в исследовании всевозможных движений материальной точки P с «нулевой» массой в декартовом пространстве $Oxyz$ (или в любом другом конфигурационном или фазовом пространстве [42,44,46,54,58,65] под воздействием гравитации со стороны материальных точек P_1 и P_2 , массы которых m_1 и m_2 отличны от нуля.*

Считается, что движение материальных точек P_1 и P_2 происходит по круговым орбитам вокруг их общего центра гравитации в соответствии с законами Кеплера [26,27].

Дифференциальные уравнения пространственной ограниченной круговой проблемы трех тел в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$, вращающейся вокруг оси Oz с постоянной угловой скоростью ω (для обозначения угловой скорости в математических работах чаще используется греческая буква ω , а в большинстве астрономических статей – латинская буква n) хорошо известны [27,58]:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \end{cases} \quad (2.15)$$

где потенциал – силовая функция Ω представлена хорошо известной формулой

$$\begin{aligned}\Omega(x, y, z) &= \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \left(\frac{m_0}{r_0} + \frac{m_1}{r_1} \right), \\ r_0^2 &= (x + a_0)^2 + y^2 + z^2, \\ r_1^2 &= (x - a_1)^2 + y^2 + z^2,\end{aligned}\tag{2.16}$$

Параметр n тождественно равен угловой скорости вращения координатной системы $Oxyz$, величине ω , которая всюду была использована в первой главе, то есть он представляет собой *угловую скорость вращения* подвижной вращающейся системы координат относительно инерциальной евклидовой системы координат, а величины a_0 и a_1 суть расстояния масс m_0 и m_1 от начала координат. Мы привели здесь уравнения ограниченной проблемы 3-х тел именно в форме (2.15), используя вместо символа ω латинскую букву n , поскольку она чаще используется в книгах, в которых рассматривается ограниченная проблема 3-х тел.

Система (2.15) обладает одним известным первым интегралом [27,46,58],

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = 2\Omega - C,\tag{2.17}$$

найденным Якоби, поэтому в математической литературе он известен как *интеграл Якоби*.

Напомним читателю, что написанного выше первого интеграла, к сожалению, *не достаточно для полного интегрирования системы* (2.15).

Если считать, что аппликата (координата z) и ее производная по времени равны нулю, тогда мы имеем упрощенную динамическую модель, получившую название «*плоской ограниченной круговой задачи трех тел*» и она описывается системой дифференциальных уравнений 4-го порядка:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} - 2n \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2n \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \end{cases} \quad (2.18)$$

Интеграл Якоби для уравнений (2.18), очевидно, тоже существует и имеет вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= 2\Omega - C, \\ \Omega(x, y, z) &= \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \left(\frac{m_0}{r_0} + \frac{m_1}{r_1}\right), \\ r_0^2 &= (x + a_0)^2 + y^2, \quad r_1^2 = (x - a_1)^2 + y^2, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где величина C – произвольная постоянная, полностью определяемая заданными начальными условиями конфигурации и проекциями скорости.

Для полного интегрирования системы дифференциальных уравнений 4-го порядка (2.18) нам также *не известен «всего» один первый интеграл.*

Вывод. Как пространственная, так и плоская ограниченная проблемы трех тел до сих пор не решены в том смысле, что не найден общий интеграл, или не найдено общее решение, описывающей ее системы дифференциальных уравнений (2.15) [23,24].

Тем не менее, астрономы и специалисты по космической динамике многократно использовали в расчетах интеграл Якоби для вычисления оптимальных параметров космических траекторий искусственных небесных тел. В частности, его аналитическая форма и качественный анализ многократно использовались в расчетах оптимальных траекторий космических аппаратов, запущенных по геоцентрическим и гелиоцентрическим траекториям в направлении Луны, Марса, Сатурна и других планет Солнечной системы [27,108–110].

п.2.3. НОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КОСМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ – ОГРАНИЧЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЧИСЛОМ КОМПОНЕНТ

Алгоритм, изложенный в п.2.1, может быть использован и для вывода дифференциальных уравнений *ограниченных задач с любым числом ($n > 2$) активно гравитирующих тел.*

Это дает возможность рассматривать *новые динамические модели космической динамики*, которые, например, могут быть названы: *ограниченная проблема 4-х тел, ограниченная проблема 5-ти тел, ограниченная проблема ста тел и, вообще, ограниченная проблема $n > 2$ тел.*

Кроме того, к этим динамическим моделям, очевидно, применим известный универсальный подход, который состоит в том, что исследование и познание существенно нелинейных моделей может быть реализовано только шаг за шагом, только приближениями или итерациями. Это наиболее продуктивный и достоверный подход к познанию окружающего нас Мира, который исследователям всегда приходится «заменять» какой либо сложной, существенно нелинейной математической или физической моделью, допускающей математическое описание.

Применительно к исследованию конкретных проблем космической динамики, всегда следует стремиться реализовать на практике научный подход, основанный на следующей методологии: в силу того, что уравнения космической динамики «не поддаются интегрированию», то, применительно к ним, можно исследовать *вопрос о существовании любых, и, в первую очередь, стационарных решений и далее, исследовать вопрос о геометрических и динамических свойствах последних в пространстве и во времени.*

Рассмотрим более детально этот вопрос, для чего сначала напомним систему дифференциальных уравнений проблемы $(n+1)$ -тел в виде двух подсистем, аналогичных системам (2.10) и (2.11)–(2.12):

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_0}{dt^2} = \frac{1}{m_0} \frac{\partial U}{\partial x_0} = m_1 \frac{x_1 - x_0}{\Delta_{10}^3} + m_2 \frac{x_2 - x_0}{\Delta_{20}^3} + \dots + m_n \frac{x_n - x_0}{\Delta_{n0}^3}, \\ \frac{d^2 y_0}{dt^2} = \frac{1}{m_0} \frac{\partial U}{\partial y_0} = m_1 \frac{y_1 - y_0}{\Delta_{10}^3} + m_2 \frac{y_2 - y_0}{\Delta_{20}^3} + \dots + m_n \frac{y_n - y_0}{\Delta_{n0}^3}, \\ \frac{d^2 z_0}{dt^2} = \frac{1}{m_0} \frac{\partial U}{\partial z_0} = m_1 \frac{z_1 - z_0}{\Delta_{10}^3} + m_2 \frac{z_2 - z_0}{\Delta_{20}^3} + \dots + m_n \frac{z_n - z_0}{\Delta_{n0}^3}, \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\begin{cases} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_i} = m_i \left(\sum_{k=1}^n m_k \frac{x_k - x_i}{\Delta_{ki}^3} + \mu \frac{x_0 - x_i}{\Delta_{0i}^3} \right), \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y_i} = m_i \left(\sum_{k=1}^n m_k \frac{y_k - y_i}{\Delta_{ki}^3} + \mu \frac{y_0 - y_i}{\Delta_{0i}^3} \right), \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial z_i} = m_i \left(\sum_{k=1}^n m_k \frac{z_k - z_i}{\Delta_{ki}^3} + \mu \frac{z_0 - z_i}{\Delta_{0i}^3} \right), i = 1, \dots, n, k \neq i. \end{cases} \quad (2.21)$$

Если сначала сократим в уравнениях (2.21) массу m_i и после этого выполним операцию обнуления параметра μ , получим систему дифференциальных уравнений, описывающих проблему n тел $P_1, P_2, \dots, P_n$ в «привычной» форме:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{x_k - x_i}{\Delta_{ki}^3}, \\ \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial y_i} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{y_k - y_i}{\Delta_{ki}^3}, \\ \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{1}{m_i} \frac{\partial U}{\partial z_i} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{z_k - z_i}{\Delta_{ki}^3}, i = 1, 2, \dots, n, k \neq i. \end{cases} \quad (2.22)$$

Следовательно, после выполнения этой математической операции мы получаем замкнутую систему дифференциальных уравнений проблемы n тел (2.22), которая не содержит массу μ и ее координаты.

Такая система дифференциальных уравнений в принципе определяет координаты n тел, $P_1, P_2, \dots, P_n$, как функции времени, поэтому после соответствующих замен в правых частях дифференциальных уравнений (2.20) координат перечисленных точек соответствующими функциями времени, последние *будут содержать*, в качестве неизвестных *только координаты бесконечно малой массы μ* , каковыми являются величины x_0, y_0, z_0 и *конечно еще время t* , посредством координат $x_k(t), y_k(t), z_k(t)$ n тел, $P_k, k=1, 2, \dots, n$.

Если удастся, после этого, *проинтегрировать систему* (2.20), тогда мы получим координаты бесконечно малой массы μ , то есть величины $x_0(t), y_0(t), z_0(t)$, как функции времени t . К сожалению, эти рассуждения имеют лишь абстрактный характер, поскольку нам не известны в аналитической форме решения дифференциальных уравнений проблем 3-х, 4-х, и так далее, $n > 4$ тел.

Если же с самого начала в указанных уравнениях приравнять параметр $m_0 = \mu$ нулю, тогда, в этом случае, мы получаем, вместо системы дифференциальных уравнений проблемы $(n+1)$ -тел, такую же в точности систему дифференциальных уравнений, но описывающую ньютонову проблему n тел, порядок которой меньше на шесть единиц.

Следовательно, вместо системы дифференциальных уравнений $(6n+6)$ -го порядка имеем подобную систему уравнений, с такой же аналитической структурой, но порядок которой равен $6n$.

С точки зрения интегрируемости системы нелинейных дифференциальных уравнений $6n$ -го порядка, или $(6n+6)$ -го порядка, *присутствуют те же самые непреодолимые трудности*, но при этом не появляются дифференциальные уравнения *ограниченной проблемы* $(n+1)$ -тел, то есть, *мы не получаем новую динамическую модель — ограниченную проблему многих тел*.

Вывод. Как и в случае проблемы 3-х тел, в ньютоновой проблеме многих ($n > 3$) тел, операции «обнуления» одной из гравитирующих масс с последующим «делением» на нее в дифференциальных уравнениях, и перестановка этих операций «местами» не являются эквивалентными математическими операциями.

Добавим к этим соображениям некоторые полезные математические выкладки. Сначала сократим обе части подсистемы (2.20) на величину $m_0 = \mu$, а в подсистеме (2.22) заменим эту величину нулем.

Тогда получим, вместо этих систем, следующие системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_0}{dt^2} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{x_k - x_0}{\Delta_{k0}^3}, \\ \frac{d^2 y_0}{dt^2} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{y_k - y_0}{\Delta_{k0}^3}, \\ \frac{d^2 z_0}{dt^2} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{z_k - z_0}{\Delta_{k0}^3}, \end{cases} \quad (2.23)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{x_k - x_i}{\Delta_{ki}^3}, \\ \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{y_k - y_i}{\Delta_{ki}^3}, \\ \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{z_k - z_i}{\Delta_{ki}^3}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad k \neq i. \end{cases} \quad (2.24)$$

Система (2.24), определяет движения n тел, $P_1, P_2, \dots, P_n$, независимо от того, известны или неизвестны координаты малой массы μ , то есть нет необходимости знать величины x_0, y_0, z_0 , как функции времени t .

Следовательно, если удастся найти какое-либо частное решение системы (2.24), $x_k(t), y_k(t), z_k(t)$, $k=1, 2, \dots, n$ и удастся реализовать замены в системе (2.23) этих величин найденными функциями времени, тогда новая, уже неавтономная система, «тождественная» системе (2.23), может быть исследована отдельно.

Действительно, допустим, что одно из частных решений системы (2.24) известно и выражается следующими известными функциями:

$$\begin{cases} x_k(t) = f_k(t), \\ y_k(t) = \varphi_k(t), \\ z_k(t) = \psi_k(t), k = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (2.25)$$

Тогда, подставляя эти функции в подсистему (2.23), получим следующую систему 6-го порядка неавтономных дифференциальных уравнений ограниченной ньютоновой задачи n тел:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_0}{dt^2} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{f_k(t) - x_0}{\Delta_{k0}^3}, \\ \frac{d^2 y_0}{dt^2} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{\varphi_k(t) - y_0}{\Delta_{k0}^3}, \\ \frac{d^2 z_0}{dt^2} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{\psi_k(t) - z_0}{\Delta_{k0}^3}, \\ \Delta_{k0}^2(t) = (f_k(t) - x_0)^2 + (\varphi_k(t) - y_0)^2 + (\psi_k(t) - z_0)^2. \end{cases} \quad (2.26)$$

Система (2.26) описывает движения бесконечно малой массы $m_0 = \mu$ в поле тяготения, создаваемое телами с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$, движущимися в соответствии с их «известным» движением, описываемым «известным решением» $f_k(t)$, $\varphi_k(t)$, $\psi_k(t)$, $k=1, 2, \dots, n$, которое, к сожалению, до сегодняшнего дня нам неизвестно.

Отсюда вытекает следующее заключение: все движения бесконечно малой массы μ описываются отдельной, неавтономной и, до сегодняшнего дня, неинтегрируемой системой дифференциальных уравнений 6-го порядка (2.26).

Для плоского случая ($z_0 = z_1 = \dots = z_n = 0$), вместо системы 6-го порядка (2.26), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений 4-го порядка, которая описывает движения бесконечно малой массы μ в поле гравитации материальных точек, $P_1, P_2, \dots, P_n$, движение которых происходит в одной и той же плоскости, что и движение самой материальной точки P_0 .

В этом случае дифференциальные уравнения ограниченной плоской проблемы n -тел, естественно также являются неавтономными относительно времени t и имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{d^2 x_0}{dt^2} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{f_k(t) - x_0}{\Delta_{k0}^3}, \\ \frac{d^2 y_0}{dt^2} = \sum_{k=1}^n m_k \frac{\varphi_k(t) - y_0}{\Delta_{k0}^3}, \\ \Delta_{k0}^2(t) = (f_k(t) - x_0)^2 + (\varphi_k(t) - y_0)^2. \end{cases} \quad (2.27)$$

На основании этого анализа можно сформулировать следующее заключение: *любое известное частное решение ньютоновой задачи n тел может служить генератором дифференциальных уравнений движения для ограниченной ньютоновой проблемы $(n+1)$ -тел.*

Это позволяет ввести понятие *ограниченной в смысле Якоби проблемы любого числа тел*, в частности, можно говорить об «ограниченной проблеме 4-х тел», «ограниченной проблеме 5-ти тел», «ограниченной проблеме ста тел» и т.д. Перейдем к рассмотрению некоторых из названных выше динамических моделей.

п.2.4. ОГРАНИЧЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ЧЕТЫРЕХ ТЕЛ

Рассмотрим сначала известные точные решения ньютоновой проблемы 3-х тел с массами m_0, m_1, m_2 соответственно:

а) эйлерово коллинеарное решение проблемы трех тел [27,58], изображенное на рис. 6; б) лагранжево треугольное решение проблемы трех тел, изображенное на рис.9.

Каждое из этих решений генерирует свой вариант ограниченной задачи четырех тел, которые могут быть названы «эйлеровой

ограниченной проблемой четырех тел» и «лагранжевой ограниченной проблемой четырех тел.

Например, дифференциальные уравнения для плоского варианта эйлеровой ограниченной проблемы 4-х тел ($z=0$, $dz/dt=0$) во вращающейся, с постоянной угловой скоростью ω_2 , системе координат, имеют вид [67]:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \omega_2^2 x - \frac{m_0 x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \left(\frac{m_1(x-1)}{((x-1)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{m_2(x+1)}{((x+1)^2 + y^2)^{3/2}} \right) \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \omega_2^2 y - \frac{m_0 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \left(\frac{m_1 y}{((x-1)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{m_2 y}{((x+1)^2 + y^2)^{3/2}} \right) \end{cases} \quad (2.28)$$

Забегая вперед, становится ясным, что аналогичные уравнения можно написать, например, и для **ограниченной проблемы пяти тел** (она описана в следующем параграфе, п. 2.5.), порожденной точным решением уравнений проблемы четырех тел, изображаемой равносторонним треугольником с координатами вершин $(1,0)$, $(-1/2, \sqrt{3}/2)$, $(-1/2, -\sqrt{3}/2)$, имеющим равные массы в вершинах, $m_1 = m_2 = m_3 = m$, а в его геометрическом центре располагается произвольная, но не равная нулю, масса m_0 (см. п. 1.8, рис. 9).

Уравнения движения для этой динамической модели имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \omega_3^2 x - \frac{m_0 x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - m \left(\frac{x-1}{((x-1)^2 + y^2)^{3/2}} + \right. \\ \left. + \frac{x + \frac{1}{2}}{\left(\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right)^{3/2}} + \frac{x + \frac{1}{2}}{\left(\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right)^{3/2}} \right) \end{cases} \quad (2.29)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} = \omega_3^2 y - \frac{m_0 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - m \left(\frac{y}{((x-1)^2 + y^2)^{3/2}} + \right. \\ \left. \frac{y - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right)^{3/2}} + \frac{y + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right)^{3/2}} \right) \end{aligned} \right.$$

Эйлера ограниченной задача 4-х тел, дифференциальные уравнения движения которой во вращающейся системе координат описывается системой (2.28), в случае равных между собой, гравитирующих масс, $m_1=m_2$, изображена на рис. 34:

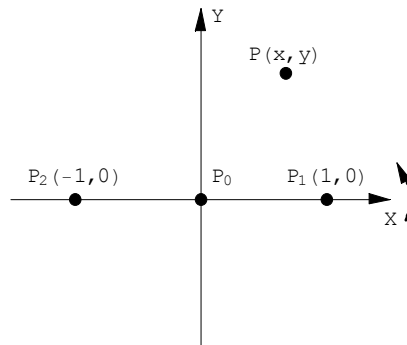


Рис. 34.

Следуя общему правилу определения положений равновесия дифференциальных уравнений динамики, изложенному в п.2.1, получаем следующие функциональные (более конкретно *алгебраические*) уравнения, определяющие положения равновесия в ограниченной проблеме 4-х тел:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 0, \\ \omega_2^2 x - \frac{m_0 x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \left(\frac{m_1 (x-1)}{((x-1)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{m_2 (x+1)}{((x+1)^2 + y^2)^{3/2}} \right) = 0, \\ \omega_2^2 y - \frac{m_0 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \left(\frac{m_1 y}{((x-1)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{m_2 y}{((x+1)^2 + y^2)^{3/2}} \right) = 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

Эти уравнения имеют решения, найденные Д. Козак и Е. Онишк [67]. Аналогично записываются уравнения, определяющие положения равновесия в ограниченных проблемах 5-и, 6-и тел и т.д.

Например, положения равновесия в ограниченной проблеме 5-и тел, порожденной равносторонним треугольником с равными в вершинах массами и с произвольной массой в его центре, определяются как решения следующей системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} f_5(x, y) \equiv \omega_3^2 x - \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - m \left(\frac{x-1}{((x-1)^2 + y^2)^{3/2}} + \right. \\ \left. + \frac{x + \frac{1}{2}}{\left(\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right)^{3/2}} + \frac{x + \frac{1}{2}}{\left(\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right)^{3/2}} \right) = 0, \\ \varphi_5(x, y) \equiv \omega_3^2 y - \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - m \left(\frac{y}{((x-1)^2 + y^2)^{3/2}} + \right. \\ \left. + \frac{y - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right)^{3/2}} + \frac{y + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right)^{3/2}} \right) = 0. \end{cases} \quad (2.31)$$

Эта система уравнений может быть записана в компактной форме, в виде

$$\begin{cases} f_5(x, y) \equiv 0, \\ \varphi_5(x, y) \equiv 0. \end{cases} \quad (2.32)$$

и, как было написано выше, она определяет положения равновесия в ограниченной проблеме 5-ти тел, порожденной гравитационным равносторонним треугольником с равными массами в вершинах, $m_1=m_2=m_3=m$ и с произвольной массой m_0 в его центре.

Обратим внимание читателя еще раз на то обстоятельство, что значения координат точек равновесия в конфигурационном вращающемся пространстве не зависят от величины скорости, так как в фазовом вращающемся пространстве компоненты скоростей обязаны быть равными нулю, согласно определению положения равновесия системы дифференциальных уравнений [23,46].

Именно по этой причине мы не приводим в системе (2.31) условия, выражающие равенство нулю первых производных координат x, y по времени t , то есть равенство нулю величин dx/dt и dy/dt , так как из стандартной записи дифференциальных уравнений, написанных в форме Коши [23,46] автоматически вытекает, что первые производные координат по времени, независимо от значения параметра n (то есть количества гравитирующих тел) всегда должны быть равными нулю.

Таким образом, проблема состоит в том, чтобы найти все вещественные решения нелинейных систем алгебраических уравнений (2.31) или (2.32), аналитическая структура которых позволяет, в принципе, привести их к «полиномиальному виду», если воспользоваться, например, алгоритмами и правилами системы Mathematica [1,2].

Мы выбрали другой, менее громоздкий метод исследования.

Используя графические возможности системы Mathematica, нами построены две кривые, геометрически изображающие выше написанные аналитические равенства, составляющие системы алгебраических уравнений (2.31) или, что то же самое, (2.32). Заметим, попутно, что если координаты точек P_1 и P_2 в эйлеровом решении суть величины $(a,0)$ и $(b,0)$, а не величины $(-1,0)$ и $(1,0)$, тогда в формулах (2.31), вместо конкретных чисел -1 и $+1$, следует написать символы a и b .

Основное правило. Координаты любой точки пересечения двух кривых, построенных с помощью графических возможностей, например, системы Mathematica, (если конечно, такие **точки пересечения существуют**) и являются приближенным (а иногда и точным) решением нелинейных алгебраических систем (2.30), (2.31), или (2.32).

Далее, имея приближенные значения координат точек пересечения изображенных кривых, с помощью итерационного метода Ньютона, или какого-либо другого аналогичного метода, вычисляем координаты их точек пересечения с любой, наперед заданной точностью.

Выбор области, в которой осуществляется поиск всех решений системы (2.31), или, в общем случае, поиск всех решений системы вида (2.32), существенно зависит от динамических и геометрических параметров динамической модели, поэтому каждый раз необходимо проводить, как можно, более богатый и более разнообразный вычислительный эксперимент.

Ниже приведена программа в системе Mathematica, позволяющая определить все решения системы (2.31) в априори выбранной нами двумерной области на плоскости $P_{\phi\chi}$.

Программа вычисления координат точек пересечения кривых [46].

```

Grapheq[μ_, n_, xs_, xe_, ys_, ye_, pts_] := Module[{s},
s = N[Sum[Sin[ $\frac{\pi(k-1)}{n-1}$ ]-1], {k, 2, n-1}];

```

$$\omega = \sqrt{1 + \frac{\mu S}{4}};$$

$$xk[k_]:=Cos\left[\frac{2\pi(k-1)}{n-1}\right];$$

$$yk[k_]:=Sin\left[\frac{2\pi(k-1)}{n-1}\right];$$

$$f = x\left(\omega^2 - \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\right) - \mu \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x - xk[k]}{((x - xk[k])^2 + (y - yk[k])^2)^{3/2}};$$

$$g = y\left(\omega^2 - \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}\right) - \mu \sum_{k=1}^{n-1} \frac{y - yk[k]}{((x - xk[k])^2 + (y - yk[k])^2)^{3/2}};$$

```

cpx=ContourPlot[f,{x,xs,xe},{y,ys,ye},Contours->{0},
ContoursShading->False,PlotPoints->pts,
DisplayFunction->Identity];
cpy=ContourPlot[g,{x,xs,xe},{y,ys,ye},Contours->{0},
ContoursShading->False,PlotPoints->pts,
DisplayFunction->Identity,ContourStyle->Hue[0]];
Po=Graphics[{RGBColor[0,0,1],PointSize[0.02],
Point[{0,0}]}];
Pn=Graphics[{PointSize[0.02],
Table[Point[{xk[k],yk[k]}],{k,1,n-1}]}];
Show[cpx,cpy,Po,Pn,DisplayFunction->$DisplayFunc-
tion]]

```

Если, например, задать значения параметров, $n=2,3$, то есть рассматривать варианты ограниченных проблем 4-х и 5-и тел, и рассмотреть случай, когда массы гравитирующих тел, равны $m_0=1$, $m=0.5$, а также выбрать границы области, в которой необходимо построить графики, изображающие соответствующие кривые (2.30) и (2.31), например, в квадрате, $[-2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2]$, мы получим следующие картины с изображением этих кривых:

Рис. 35, 36

Точками пересечения кривых для $n=2$ (рис. 35) являются шесть точек $N_1, N_2, N_3, N_4, S_1, S_2$, которые и представляют *положения равновесия* (то есть *стационарные решения*) дифференциальных уравнений ограниченной ньютоновой проблемы 4-х тел, конкретнее ее «эйлерова» варианта.

На рисунке 36 представлены положения равновесия (точки N_k и S_k) ограниченной проблемы пяти тел в той же двумерной координатной области $-2 \leq x \leq 2$ и $-2 \leq y \leq 2$, в количестве *девяти точек*.

Естественно, возникает *вопрос о «полноте» решения сформулированной проблемы*, которая здесь может быть сформулирована следующим образом: *Существует ли гарантия того, что таким методом найдены все стационарные решения ограниченной проблемы 4-х тел для заданных значений гравитирующих масс, во всем фазовом или конфигурационном пространствах.*

Очевидным является лишь утверждение о том, что количество положений равновесия зависит от величин параметров каждой динамической модели, то есть от величин гравитационных масс и их взаимных расстояний.

Вместе с тем полного, формально-логического ответа на поставленный вопрос мы не имеем. Мы не можем утверждать, что для любых, априори заданных значений параметров гравитационной модели число положений равновесия будет инвариантным. Что касается этих конкретных моделей с заданными конкретными значениями масс и расстояний, мы можем утверждать, что найдены все положения равновесия в ограниченной проблеме 4-х и 5-и тел.

Этот вывод опирается на результаты анализа априори большого количества вариантов выбора областей изменения координат x и y точек равновесия на координатной плоскости $P_{\phi xy}$.

Ниже, на рисунках 37 и 38 представлены положения равновесия вариантов ограниченной проблемы 6-и и 7-и тел, в которых гравитационное поле, создано гравитацией квадрата и правильного пятиугольника, в вершинах которых располагаются равные между собой массы.

Рис. 37, 38

Авторы, рассмотревшие эти модели, показали [46], что таких точек равновесия, при заданных значениях масс в вершинах многоугольников, в ограниченной проблеме 6-и тел имеется *двенадцать*, а в ограниченной проблеме 7-и тел имеется *пятнадцать* положений равновесия.

Вернемся к ограниченной проблеме 4-х тел, «порожденной» *«лагранжевым» равносторонним треугольником* $P_1P_2P_3$ с массами m_1, m_2, m_3 в его вершинах, вращающимся вокруг центра масс с постоянной угловой скоростью ω_3 . Его угловая скорость вращения вокруг центра масс определена еще Лагранжем, и она равна

$$\omega_3^2 = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{a^3} \quad (2.33)$$

В этом соотношении величина a равна длине стороны равностороннего треугольника.

Если массы в вершинах равностороннего треугольника равны m , а радиус описанной окружности равен a_0 , тогда его угловая скорость вращения вокруг своего геометрического центра определяется из общей формулы (1.54) и для этого случая получаем следующее значение:

$$\omega_3^2 = \frac{m}{a_0^3 \sqrt{3}} \quad (2.34)$$

Мы раньше подчеркивали, что равносторонний треугольник является *геометрическим образом точного частного решения* ньютоновой задачи трех тел, порождающий гравитационное поле, в котором может двигаться *четвертая, пассивно гравитирующая материальная точка* P с «малой», *фактически нулевой* массой μ .

Это означает, как было сказано выше, что лагранжев треугольник также может служить генератором одной из возможных

динамических моделей – *ограниченной задачи четырех тел*. Следовательно, можно исследовать всевозможные движения «нулевой» массы μ в трехмерном пространстве, в поле гравитации вращающегося, вокруг своего центра, равностороннего треугольника $\Delta P_1P_2P_3$, в вершинах которого располагаются, соответственно, массы m_1, m_2, m_3 (рис. 39).

Прямоугольная двумерная декартова система координат $Gxу$ вращается вокруг центра масс, точки G , в плоскости $Gxу$, с угловой скоростью, вычисленной по формулам (2.33) или (2.34).

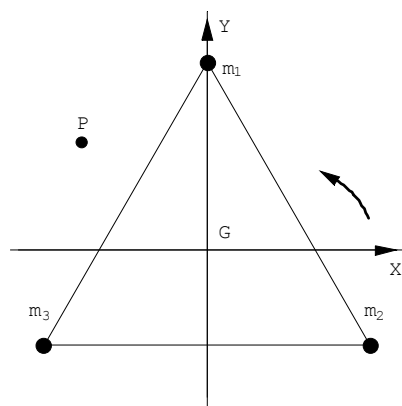


Рис. 39

Таким образом, второй вариант ограниченной проблемы 4-х тел состоит в исследовании всевозможных движений пассивно гравитирующей точки P с бесконечно малой (нулевой) массой μ в гравитационном поле, создаваемом притяжением этой точки со стороны материальных точек P_1, P_2, P_3 с массами m_1, m_2, m_3 , образующих заданный вращающийся равносторонний треугольник.

На рисунке 39 изображена плоская модель сформулированной выше проблемы, для которой система дифференциальных уравнений, описанная во вращающейся декартовой 4-мерной фазовой системе координат $Gxуr_xr_y$, хорошо известна:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = p_x, \\ \frac{dy}{dt} = p_y, \\ \frac{dp_x}{dt} = \omega^2 x + 2\omega \cdot p_y + \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \frac{dp_y}{dt} = \omega^2 y - 2\omega \cdot p_x + \frac{\partial U}{\partial y} \end{array} \right. \quad (2.35)$$

$$U = \frac{m_1}{\Delta_1} + \frac{m_2}{\Delta_2} + \frac{m_3}{\Delta_3}, \quad (2.36)$$

$$\Delta_k^2 = (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2, \quad (2.37)$$

$k = 1, 2, 3.$

Для пространственного случая ограниченной проблемы четырех тел система дифференциальных уравнений, описывающая движения пассивно гравитирующей точки P , имеют ту же аналитическую форму, что и уравнения (1.35), приведенные в первой главе:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = p_x, \quad \frac{dy}{dt} = p_y, \quad \frac{dz}{dt} = p_z, \\ \frac{dp_x}{dt} = \omega^2 x + 2\omega \cdot p_y + \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \frac{dp_y}{dt} = \omega^2 y - 2\omega \cdot p_x + \frac{\partial U}{\partial y}, \\ \frac{dp_z}{dt} = \frac{\partial U}{\partial z}, \end{array} \right. \quad (2.38)$$

Здесь потенциал U имеет такую же аналитическую структуру (2.16), но взаимные расстояния Δ_k являются пространственными расстояниями, т.е.

$$\Delta_k^2 = (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 + (z - z_k)^2, \quad (2.39)$$

$$k = 1, 2, 3.$$

п.2.5. ОГРАНИЧЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПЯТИ ТЕЛ

Опираясь на алгоритм «генерирования» новых ограниченных моделей, изложенный в п.2.3, рассмотрим четыре модели ограниченной проблемы пяти тел.

В научной литературе известны, по меньшей мере, четыре центральные конфигурации в ньютоновой проблеме четырех тел [46], каждая из которых «порождает» динамическую модель – ограниченную проблему пяти тел.

Она, очевидно, состоит в исследовании всевозможных траекторий, на плоскости Gxy , или в трехмерном пространстве $Gxyz$, точки P с «нулевой» массой ($\mu=0$), обусловленных ньютоновской гравитацией со стороны четырех материальных точек с не нулевыми массами.

Активно гравитирующие материальные точки образуют следующие известные конфигурации:

- 1) первая конфигурация – вращающийся в своей плоскости равносторонний треугольник с равными массами m в вершинах и с произвольной, четвертой массой m_0 в центре;
- 2) вторая конфигурация – вращающийся в своей плоскости квадрат, также имеющий равные между собой, ненулевые массы в вершинах, (рис. 40);
- 3) третья конфигурация – вращающийся в своей плоскости вокруг своего геометрического центра ромб с попарно равными массами в противоположных вершинах [76,78], (см. рис. 41);
- 4) четвертая конфигурация – это вращающийся в своей плоскости дельтоид вокруг точки пересечения его диагоналей, точки G на рис.42, [90,91]. Массы, расположенные на оси Gx , равны между собой.

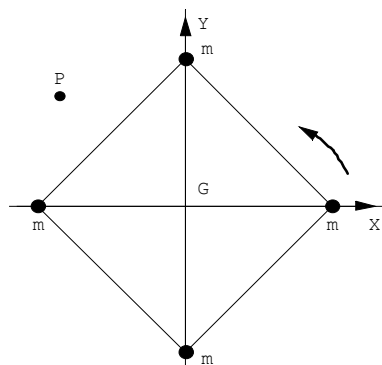


Рис. 40

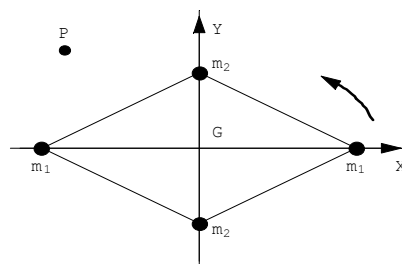


Рис. 41

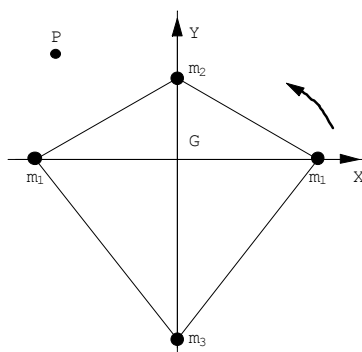


Рис. 42

Перечисленные четыре центральные конфигурации *генерируют*, то есть «порождают» четыре варианта ограниченной проблемы пяти тел, при этом *каждая из приведенных динамических моделей порождает как плоскую, так и пространственную ограниченные проблемы пяти тел.*

Вычисления показывают, что в плоской ограниченной проблеме 5-ти тел, «порожденной» равносторонним треугольником с равными массами в вершинах и с произвольной массой в центре, существуют девять положений равновесия, то есть *существуют девять точных частных решений типа положений равновесия дифференциальных уравнений ограниченной проблемы 5-ти тел.*

Изложим теперь более подробно результаты Н.И.Земцовой [77,78], относящиеся к ограниченной проблеме 5-ти тел, порождаемой, вращающимся в своей плоскости вокруг своего геометрического центра, ромбом, изображенном на рис. 40. Напомним, что существование точного решения в проблеме 4-х тел, изображаемого ромбом, рассмотрено и изложено в главе 1.

Пусть координаты вершин ромба суть следующие величины: $P_1(\alpha, 0)$, $P_2(0, 1)$, $P_3(-\alpha, 0)$, $P_4(0, -1)$.

Нам уже известно, что существование таких конфигураций гарантируется условиями, выражающими аналитическую зависимость их угловой скорости вращения вокруг неподвижного центра от динамических и геометрических параметров конфигурации. Для этой конкретной динамической модели они уже получены.

Дифференциальные уравнения ограниченной проблемы 5-ти тел, в основе которой имеется вращающийся ромб, суть следующие [77,78]:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= 2\omega \frac{dy}{dt} + \omega^2 x - \left(\frac{m_1(x-\alpha)}{((x-\alpha)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{m_2x}{(x^2 + (y-1)^2)^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_1(x+\alpha)}{((x+\alpha)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{m_2x}{(x^2 + (y+1)^2)^{3/2}} \right), \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -2\omega \frac{dx}{dt} + \omega^2 y - \left(\frac{m_1y}{((x-\alpha)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{m_2(y-1)}{(x^2 + (y-1)^2)^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_1y}{((x+\alpha)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{m_2(y+1)}{(x^2 + (y+1)^2)^{3/2}} \right). \end{aligned} \right. \quad (2.40)$$

где параметр α означает отношение диагоналей ромба.

Поиск точных частных решений системы (2.40) типа «положений равновесия», которая описывает ограниченную проблему 5-и тел на основе ромба, сводится, как нам уже известно, к поиску всех вещественных решений следующей системы функциональных уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} \omega^2 x - \left(\frac{m_1(x-\alpha)}{((x-\alpha)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{m_2 x}{(x^2 + (y-1)^2)^{3/2}} + \right. \\ \left. + \frac{m_1(x+\alpha)}{((x+\alpha)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{m_2 x}{(x^2 + (y+1)^2)^{3/2}} \right) = 0, \\ \omega^2 y - \left(\frac{m_1 y}{((x-\alpha)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{m_2(y-1)}{(x^2 + (y-1)^2)^{3/2}} + \right. \\ \left. + \frac{m_1 y}{((x+\alpha)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{m_2(y+1)}{(x^2 + (y+1)^2)^{3/2}} \right) = 0. \end{aligned} \right. \quad (2.41)$$

Естественно, к уравнениям (2.41) необходимо добавить равенство нулю первых производных по времени координат x и y , то есть величин $dx/dt = 0$, $dy/dt = 0$.

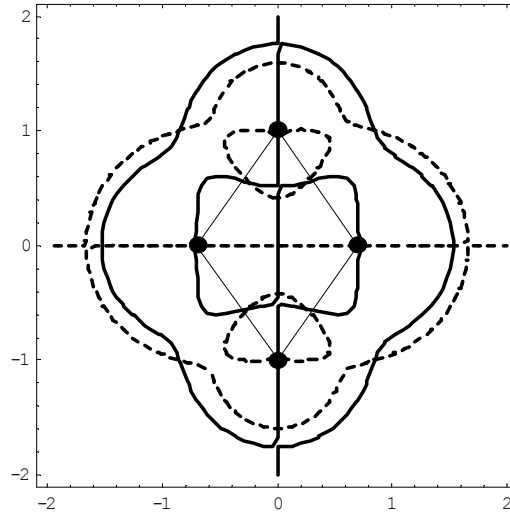


Рис. 43

На рис. 43 изображены кривые, определенные равенствами (2.41), и точки пересечения сплошной и пунктирной кривых, а

также точки их пересечения с прямыми линиями (осями координат) другой «расцветки».

Эти точки пересечения изображают стационарные решения дифференциальных уравнений ограниченной проблемы 5-ти тел, порожденной вращающимся активно гравитирующим ромбом.

Система (2.41) должна быть решена с учетом условия, выражающего зависимость угловой скорости вращения ромба, величины ω , вокруг своего геометрического центра, от значений масс и отношения его диагоналей, а также зависимость между массами, расположенными в вершинах ромба. Для угловой скорости имеем следующую формулу

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{m_1(64\alpha^3 - (1 + \alpha^2)^{3/2})}{4\alpha^3(1 + \alpha^2)^{3/2}(8 - (1 + \alpha^2)^{3/2})}}, \quad (2.42)$$

Знак «минус» в формуле (2.42) означает вращение конфигурации в «противоположную» сторону, по сравнению с выбранным нами вращением системы координат, например, с положительным вращением – «против часовой стрелки».

Масса m_2 должна вычисляться по следующей точной формуле

$$m_2 = \frac{m_1(8\alpha^3 - (1 + \alpha^2)^{3/2})}{\alpha^3(8 - (1 + \alpha^2)^{3/2})}. \quad (2.43)$$

Автор реализовала вычисления для следующих значений параметров: $\alpha = 0,7$, $m_1 = 10$, $m_2 = 4.363931987$, $\omega = 3.47669$.

Для этих значений параметров, координаты точек пересечения кривых, изображенных на рис. 43, то есть координаты стационарных решений с точностью $\cong 10^{-5}$, суть следующие величины:

(0; 0); (± 1.53438 ; 0.00000); (0.00000; ± 0.411266);
(0.00000 ; ± 1.59054); (± 0.852355 ; ± 1.00049).

Таким образом, только при одновременном выполнении соотношений (2.41), (2.42) и (2.43) дифференциальные уравнения ньютоновой задачи четырех тел имеют точное частное решение, изображаемое вращающимся ромбом с указанными параметрами.

Следовательно, для заданных значений параметров t_1 , t_2 и α однозначно определяется угловая скорость вращения ромба ω и именно для этого ромба «существует» динамическая модель – ограниченная «ромбоподобная» проблема пяти тел.

Существование ограниченной «ромбоподобной» проблемы пяти тел с другими значениями параметров α , t_1 , t_2 также гарантировано, если новая совокупность значений параметров (α , t_1 , t_2 и ω) удовлетворяет, в частности, условиям (2.42) и (2.43).

Существование другой динамической модели, а именно, ограниченной задачи пяти тел, обусловленной вращающимся в своей плоскости квадратом с равными массами m в вершинах и со стороны, равной «единице» гарантируется угловой скоростью его вращения, которая должна быть определена из условия

$$\omega_4^2 = \frac{m(4 + \sqrt{2})}{4\sqrt{2}} \quad (2.44)$$

Эта динамическая модель была детально исследована М. Якубьяком [68].

II.2.6. ОГРАНИЧЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ШЕСТИ ТЕЛ

Порождающими гравитационными моделями для ограниченной проблемы 6-и тел являются точные частные решения следующих моделей общей ньютоновой проблемы 5-ти тел:

1) квадрат с равными массами в вершинах и с произвольной массой m_0 в центре;

2) регулярный вращающийся пятиугольник с равными массами m в вершинах, исследованный Д.Козак [46];

3) ромб с попарно равными массами в вершинах ($m_1=m_3$, $m_2=m_4$) и с произвольной массой m_0 в центре [79,98];

4) дельтоид с массой m_0 , расположенной на его «большой» диагонали [90,94].

Изложим подробнее ограниченную проблему 6-ти тел, в которой гравитационное поле «порождено» ромбом, в вершинах которого, и в центре его находятся не равную нулю массы. Этот случай также был изучен и описан в работах Н.И. Земцовой [98].

Таким образом, объектом, создающим ньютоново гравитационное поле на плоскости P_0xy , является ромб с попарно равными массами в вершинах, вращающийся в своей плоскости вокруг центральной массы m_0 .

Пусть вращающийся вокруг точки P_0 ромб (см. рис. 44) имеет вершины с координатами $P_1(1,0)$, $P_2(0,\alpha)$, $P_3(-1,0)$, $P_4(0,-\alpha)$, а их массы соответственно равны $m_1=m_3$, $m_2=m_4$. Кроме того, в его центре расположена масса m_0 .

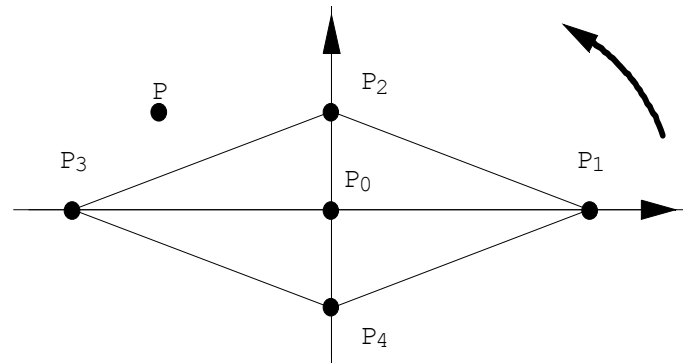


Рис. 44.

Тогда дифференциальные уравнения движения в плоскости P_0xy (или, что то же самое, в плоскости Gxy) пассивно гравитирующей массы ($\mu=0$) в поле гравитации вращающегося, с посто-

янной угловой скоростью ω , ромба и с центральной массой m_0 , имеют вид [78]:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= 2\omega \frac{dy}{dt} + \omega^2 x - \frac{m_0 x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \left(\frac{m_1(x - \alpha)}{((x - \alpha)^2 + y^2)^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_2 x}{(x^2 + (y - 1)^2)^{3/2}} + \frac{m_1(x + \alpha)}{((x + \alpha)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{m_2 x}{(x^2 + (y + 1)^2)^{3/2}} \right), \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -2\omega \frac{dx}{dt} + \omega^2 y - \frac{m_0 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \left(\frac{m_1 y}{((x - \alpha)^2 + y^2)^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m_2(y - 1)}{(x^2 + (y - 1)^2)^{3/2}} + \frac{m_1 y}{((x + \alpha)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{m_2(y + 1)}{(x^2 + (y + 1)^2)^{3/2}} \right). \end{aligned} \right. \quad (2.45)$$

Очевидно, эти уравнения отличаются от уравнений (2.40) только слагаемыми, содержащими массу m_0 .

Угловая скорость вращения ромба, ω и масса m_2 однозначно определяются значениями других известных параметров модели, то есть заданными величинами m_0 , m_1 , α , в соответствии с формулами, полученными Н.И. Земцовой [77]:

$$\omega = \pm \sqrt{\frac{4m_0(1 + \alpha^2)^{3/2}(8\alpha^3 - (1 + \alpha^2)^{3/2}) + fm_1(64\alpha^3 - (1 + \alpha^2)^{3/2})}{4\alpha^3(1 + \alpha^2)^{3/2}(8 - (1 + \alpha^2)^{3/2})}}, \quad (2.46)$$

$$m_2 = \frac{4m_0(1 + \alpha^2)^{3/2}(\alpha^3 - 1) + m_1(8\alpha^3 - (1 + \alpha^2)^{3/2})}{\alpha^3(8 - (1 + \alpha^2)^{3/2})}. \quad (2.47)$$

Для определения положений равновесия системы дифференциальных уравнений (2.45) необходимо найти на координатной плоскости Gxy все решения следующей системы нелинейных алгебраических уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^2 x - \frac{m_0 x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \left(\frac{m_1(x - \alpha)}{((x - \alpha)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{m_2 x}{(x^2 + (y - 1)^2)^{3/2}} + \right. \\ \left. + \frac{m_1(x + \alpha)}{((x + \alpha)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{m_2 x}{(x^2 + (y + 1)^2)^{3/2}} \right) = 0, \\ \omega^2 y - \frac{m_0 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \left(\frac{m_1 y}{((x - \alpha)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{m_2(y - 1)}{(x^2 + (y - 1)^2)^{3/2}} + \right. \\ \left. + \frac{m_1 y}{((x + \alpha)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{m_2(y + 1)}{(x^2 + (y + 1)^2)^{3/2}} \right) = 0. \end{array} \right. \quad (2.48)$$

Решение системы уравнений (2.48) относительно неизвестных x и y , в аналитическом виде не представляется возможным, поэтому целесообразно создавать какие-то комбинированные методы и алгоритмы, гарантирующие обоснованные, надежные результаты.

При этом очевидным является лишь тот факт, что все по парные вещественные решения нелинейной алгебраической системы (2.48), с учетом соотношений (2.46) и (2.47), как и раньше, *определяют координаты частных решений – положений равновесия* дифференциальных уравнений ограниченной задачи шести тел (2.45).

На рис. 45 представлены эти положения равновесия (т.е. точки пересечения непрерывной и сплошной кривых) для значений параметров $m_0=1$, $m_1=10$, $m_2=2.10910478$, $\omega=3.53889\dots$, вычисленных в соответствии с формулами (2.46) и (2.47).

Как было написано выше, положениями равновесия являются также и точки пересечения «сплошных» и «пунктирных» прямых и кривых, для которых, с учетом, приведенных выше, значений параметров m_0 , m_1 , m_2 и α , имеем четырнадцать положений равновесия со следующими координатами:

$(\pm 0.190542; 0.00000)$, $(\pm 1.50793; 0.00000)$, $(0.00000; \pm 0.580416)$,
 $(0.00000; \pm 1.45048)$, $(0.633465; \pm 1.02567)$.

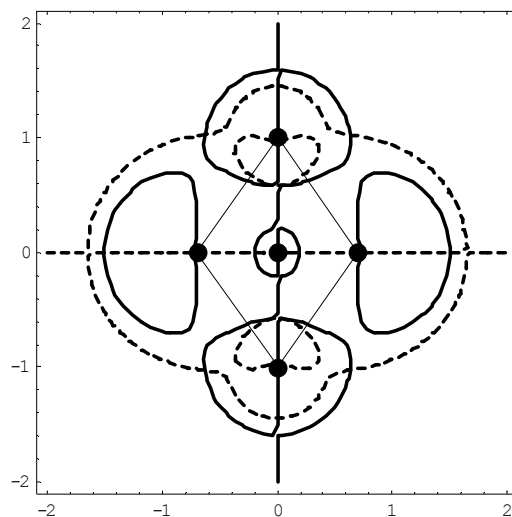


Рис. 45.

п.2.7. ОГРАНИЧЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ СЕМИ ТЕЛ

Названные в заголовке динамические модели «порождены» следующими четырьмя гравитационными моделями шести тел:

1. Ограниченная задача, порожденная вращающимся регулярным шестиугольником с равными массами в вершинах $m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m_6=m$, [46];
2. Ограниченная задача на основе вращающегося пятиугольника с равными массами в вершинах, $m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m$ и с произвольной массой m_0 в центре, исследованная Д. Козак [46];
3. Ограниченную задачу на основе двух, вращающихся вокруг общего центра, равносторонних концентрических треугольников с массами $m_1=m_2=m_3=m$, $m_4=m_5=m_6=m^*$ и ориентированных друг относительно друга на угол 60° , исследовала А.Силушек [106,107];

4. Ограниченная задача на основе двух, вращающихся вокруг общего центра, равносторонних треугольников, без углового вращения одного относительно другого, с массами $m_1=m_2=m_3=m$, $m_4=m_5=m_6=m^*$.

Отметим, в частности, что вывод и анализ основных соотношений между динамическими и геометрическими параметрами, гарантирующих существование ограниченных проблем, относящихся к вариантам 3 и 4, были непростыми алгебраическими операциями, с которыми справилась А.Силушек. Здесь мы приводим одну из возможных геометрических конфигураций, существование которой гарантируется теоремой Эльмабсута, приведенной в п.1.7.

Это точное решение ограниченной проблемы семи тел, «рожденной двумя концентрическими равносторонними треугольниками», ориентированными один относительно другого на угол $\pi/3$.

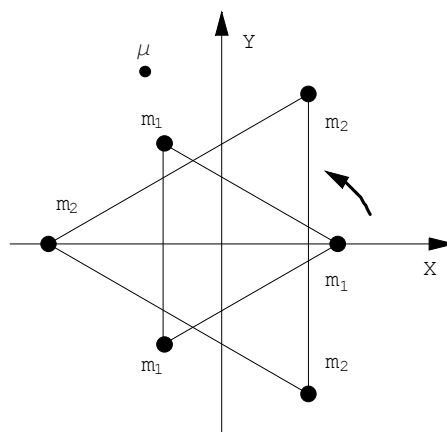


Рис. 46

п.2.8. ОГРАНИЧЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ВОСЬМИ ТЕЛ

В названных выше динамических моделях количество активно гравитирующих масс, очевидно, равно семи.

Известны следующие конфигурации, порождающие ограниченную проблему восьми тел, то есть такие конфигурации семи тел, каждая из которых, в свою очередь, геометрически представляет собой известное точное стационарное решение дифференциальных уравнений общей ньютоновой проблемы семи тел:

- 1) правильный семиугольник, в вершинах которого расположены равные между собой массы, $m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m_6=m_7=m$;
- 2) регулярный шестиугольник с равными массами в вершинах, $m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m_6=m$ и с произвольной массой m_0 в его геометрическом центре;
- 3) два равносторонних треугольника с равными массами $m_1=m_2=m_3=m$, $m_4=m_5=m_6=m^*$ у каждого из них в вершинах, ориентированных друг относительно друга на угол $\pi/3$, и с произвольной, не равной нулю массой m_0 в их совпадающих геометрических центрах. Существование такой конфигурации вытекает из теоремы п.1.7;
- 4) два равносторонних треугольника с равными массами в вершинах, $m_1=m_2=m_3=m$, $m_4=m_5=m_6=m^*$ «без относительного поворота» одного относительно другого и с произвольной массой m_0 в их общем геометрическом центре.

Каждая из перечисленных конфигураций семи активно гравитирующих тел, очевидно, «генерирует» ограниченную проблему восьми тел.

Рассмотрим более подробно случаи 3) и 4), изображенные на рисунке 47, то есть рассмотрим гравитирующие системы, которые «порождают» ограниченные проблемы восьми тел на базе двух равносторонних треугольников без относительного углового сдвига и с относительным сдвигом один относительно другого на угол $\pi/3$ и имеющих в общем центре массу m_0 [106,107].

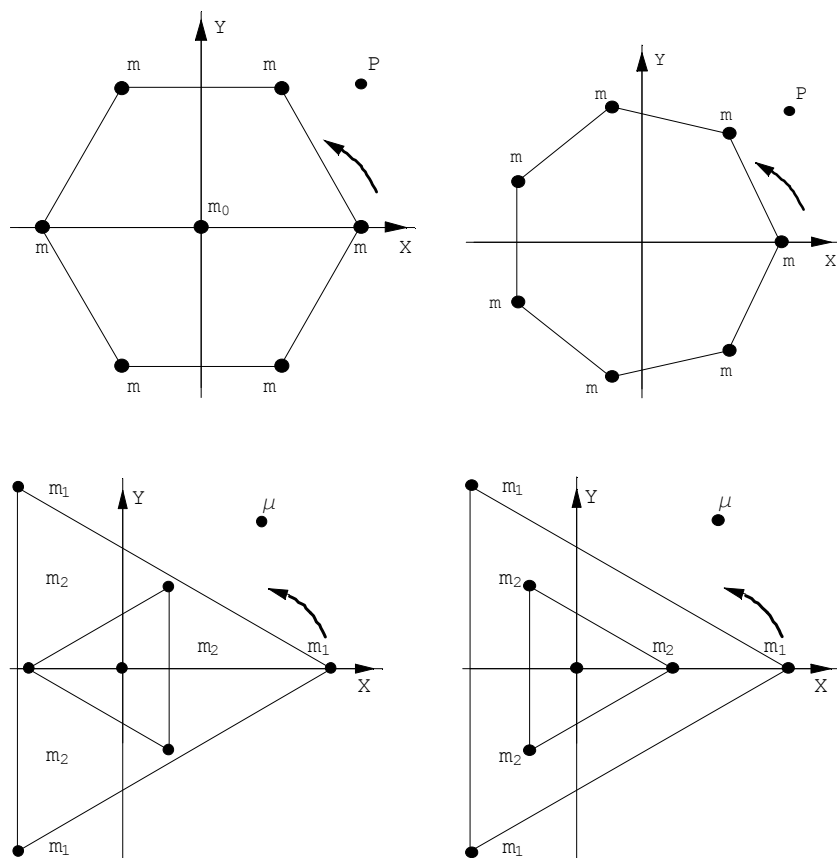


Рис. 47

На рисунке 47 изображена, в частности, конфигурация ограниченной задачи 8-и тел в плоскости $z \equiv 0$, во вращающейся относительно оси P_0z системе координат P_0xyz , в которой вершины треугольников, точки $P_1, \dots, P_6$ имеют, например, следующие заданные координаты: $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $P_3 = (-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, $P_4 = (\frac{1}{2}r_2, \frac{\sqrt{3}}{2}r_2)$, $P_5 = (-r_2, 0)$, $P_6 = (\frac{1}{2}r_2, -\frac{\sqrt{3}}{2}r_2)$.

Существование, для всех вещественных значений t , конфигурации, состоящей из двух равносторонних треугольников, с относительным сдвигом на угол $\pi/3$, в частности, вытекает из теоремы Эльмабсута (п.1.7). Также ясно, что в случае $r_1 = r_2$ и $m_1 = m_2$, ограниченная задача 8-и тел переходит в другую, уже описанную выше, модель, состоящую в движении нулевой массы в поле тяготения, порожденное, вращающимся вокруг тела P_0 с массой m_0 , правильным шестиугольником.

п.2.9. ОГРАНИЧЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ДЕВЯТИ ТЕЛ

Генераторами таких динамических моделей служат стационарные решения ньютоновой проблемы восьми тел, среди которых выделим следующие:

- 1) ограниченная проблема 9-ти тел, порожденная гравитацией нулевой массы ($\mu=0$) со стороны правильного, вращающегося вокруг своего геометрического центра, восьмиугольника с равными массами в вершинах $m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m_6=m_7=m_8=m$;
- 2) ограниченная проблема 9-ти тел, порожденная гравитацией нулевой массы со стороны правильного семиугольника с равными в вершинах массами, $m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m_6=m_7=m$, вращающегося вокруг своего геометрического центра, в котором находится произвольная, не равная нулю масса m_0 ;
- 3) ограниченная проблема 9-ти тел, порожденная моделью Эльмабсута, состоящей из двух концентрических гравитационных квадратов с массами $m_1=m_2=m_3=m_4=m$ и $m_5=m_6=m_7=m_8=m^*$, взаимно ориентированных один относительно другого на угол $\pi/4$ (отметим доказательство этого утверждения, приведенное в монографии Е.В.Ихсанова [93], отличное от доказательства Б.Эльмабсута [66]);

- 4) ограниченная проблема 9-ти тел, рожденная конфигурацией, состоящей из двух ромбов (без относительного поворота одного относительно другого), существование которой доказано Н.И.Земцовой [97–99];
- 5) ограниченная проблема 9-ти тел, состоящая из двух вращающихся вокруг общего центра с одинаковой угловой скоростью квадратов, без поворота одного квадрата относительно другого, с массами $m_1=m_2=m_3=m_4=m$, $m_5=m_6=m_7=m_8=m^*$, создающих гравитационное поле, в котором движется бесконечно малая масса ($\mu=0$);
- 6) ограниченная проблема 9-ти тел, порожденная гравитацией нулевой массы со стороны ромба и прямоугольника, имеющих общий геометрический центр, в вершинах которых располагаются гравитационные массы, исследованная Д.М. Диаровой [103].

На рис. 48 приведены две динамические модели – частные случаи общей ньютоновой проблемы 8-ми тел, состоящие из двух ромбов и «ромб+прямоугольник», для которых необходимыми условиями существования такой конфигурации являются выполнение следующих условий [98,103,104]:

$$\begin{aligned}
 m_1 = m_3, \quad m_2 = m_4, \quad m_5 = m_6 = m_7 = m_8, \\
 \omega^2 = \frac{m_1}{4} + \frac{2m_2}{(1+\alpha^2)^{3/2}} + \\
 + 2m_5 \left(\frac{1+\beta}{((1+\beta)^2 + \gamma^2)^{3/2}} + \frac{1-\beta}{((1-\beta)^2 + \gamma^2)^{3/2}} \right).
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Для случая двух ромбов имеем следующие соотношения, гарантирующие существование ограниченной проблемы 9-ти тел:

$$m_1 = m_3, \quad m_2 = m_4, \quad m_5 = m_7, \quad m_6 = m_8.$$

$$\omega^2 = \frac{m_1}{4\alpha^3} + \frac{2m_2}{(1+\alpha^2)^{3/2}} + \frac{4\beta m_5}{(\beta^2 - \alpha^2)^2} + \frac{2\alpha^3 m_6}{(\alpha^4 + \beta^2)^{3/2}}. \quad (2.49)$$

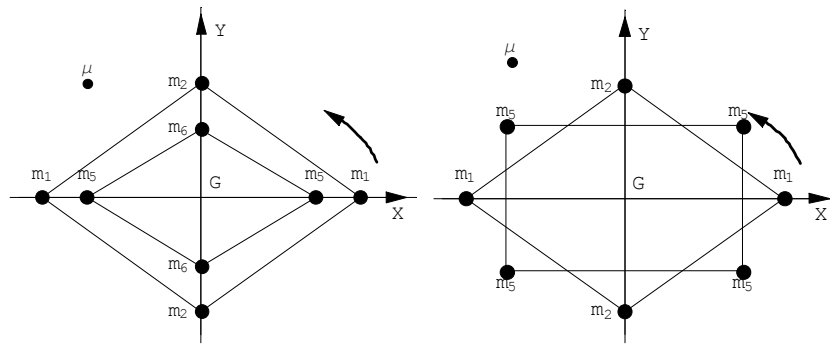


Рис. 48.

п.2.10. ОГРАНИЧЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ДЕСЯТИ ТЕЛ

Перечислим известные варианты динамической модели – ограниченной проблемы 10-ти тел:

1. Ограниченная проблема 10-ти тел, порожденная вращающимся вокруг своего геометрического центра правильным девятиугольником с равными в вершинах массами, $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = m_7 = m_8 = m_9 = m$;
2. Ограниченная проблема 10-ти тел, порожденная вращающимся вокруг своего геометрического и, одновременно, динамического центра с произвольной массой m_0 , правильным восьмиугольником с равными массами $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m_5 = m_6 = m_7 = m_8 = m$ в вершинах;
3. Ограниченная проблема 10-ти тел, порожденная тремя концентрическими равносторонними треугольниками с общим геометрическим центром и с равными в вершинах массами, $m_1 = m_2 = m_3 = m$, $m_4 = m_5 = m_6 = m^*$, $m_7 = m_8 = m_9 = m^{**}$, с поворотом

каждого из треугольников на угол $\pi/3$ относительно соседних треугольников ;

4. Ограниченная проблема 10-ти тел, порожденная конфигурацией, состоящей из концентрических регулярного шестиугольника и равностороннего треугольника, предложенная Н.И. Земцовой [98];
5. Ограниченная проблема 10-ти тел, порожденная двумя концентрическими квадратами с массами $m_1=m_2=m_3=m_4=m$, $m_5=m_6=m_7=m_8=m^*$ в вершинах, с поворотом одного квадрата относительно другого на угол $\pi/4$ и с центральной массой, равной m_0 [93,100];
6. Ограниченная проблема 10-ти тел, порожденная двумя концентрическими квадратами с равными в вершинах массами m и m^* соответственно, без их относительного поворота и с центральной массой m_0 [93,100];
7. Ограниченная проблема 10-ти тел, порожденная конфигурацией, состоящей из двух концентрических ромбов (без относительного поворота) с однозначными зависимостями между их массами, а в ее центре располагается масса m_0 [102];
8. Ограниченная проблема 10-ти тел, порожденная конфигурацией, состоящей из ромба и прямоугольника с общим центром, в котором располагается масса m_0 [97,103].

Приведем далее формулы, описывающие математические соотношения для варианта № 8, то есть для ограниченной проблемы 10-ти тел с «гравитационными» ромбом и прямоугольником. Они получены в работах Д. Диаровой [103,105].

Будем для определенности считать, что на рис.49 материальные точки P_1, P_2, P_3, P_4 образуют ромб, а точки P_5, P_6, P_7, P_8 , образуют прямоугольник. Для их координат примем следующие обозначения:

$$P_1(1;0), P_2(0;\alpha), P_3(-1;0), P_4(0,-\alpha), P_5(\beta;\gamma), P_6(-\beta;\gamma), P_7(-\beta;-\gamma), P_8(\beta;-\gamma), \text{ где } \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0.$$

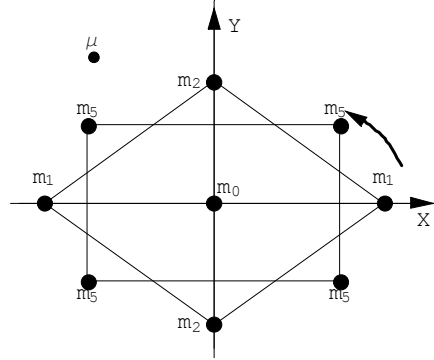


Рис. 49.

Тогда угловая скорость вращения конфигурации определяется параметрами модели по следующей формуле, полученной Д. Дидаровой [104,105]:

$$\omega^2 = m_0 + \frac{m_1}{4} + \frac{2m_2}{(1+\alpha^2)^{3/2}} + \frac{2(1+\beta)m_5}{((1+\beta)^2 + \gamma^2)^{3/2}} + \frac{2(1-\beta)m_5}{(1-\beta)^2 + \gamma^2)^{3/2}}. \quad (2.50)$$

Уравнения, определяющие положения равновесия для рассматриваемой конкретной модели, имеют вид

$$\begin{cases} \omega^2 x + \frac{\partial \tilde{R}}{\partial x} = 0, \\ \omega^2 y + \frac{\partial \tilde{R}}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (2.51)$$

где угловая скорость ω определяется выражением (2.50), а возмущающая функция R для случая «ромб+прямоугольник» в развернутом виде имеет вид

$$\begin{aligned}
\tilde{R} = & \frac{m_0}{(x^2 + y^2)^{1/2}} + m_1 \left(\frac{1}{((x-1)^2 + y^2)^{1/2}} + \frac{1}{((x+1)^2 + y^2)^{1/2}} \right) + \\
& + m_2 \left(\frac{1}{(x^2 + (y-\alpha)^2)^{1/2}} + \frac{1}{(x^2 + (y+\alpha)^2)^{1/2}} \right) + \\
& + m_5 \left(\frac{1}{((x-\beta)^2 + (y-\gamma)^2)^{1/2}} + \frac{1}{((x+\beta)^2 + (y-\gamma)^2)^{1/2}} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{((x+\beta)^2 + (y+\gamma)^2)^{1/2}} + \frac{1}{((x-\beta)^2 + (y+\gamma)^2)^{1/2}} \right).
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Для удобства введем в рассмотрение функции

$$f_8(x, y) = \omega^2 x + \frac{\partial \tilde{R}}{\partial x}, \quad g_8(x, y) = \omega^2 y + \frac{\partial \tilde{R}}{\partial y}. \tag{2.53}$$

Тогда система (2.51) запишется в «стандартном виде»:

$$\begin{cases} f_8(x, y) = 0, \\ g_8(x, y) = 0. \end{cases} \tag{2.54}$$

В подробной записи уравнения (2.54) выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
f_8(x, y) = & \omega^2 x - \frac{m_0 x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \\
& - m_1 \left(\frac{x-1}{((x-1)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{x+1}{((x+1)^2 + y^2)^{3/2}} \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -m_2x\left(\frac{1}{(x^2+(y-\alpha)^2)^{3/2}}+\frac{1}{(x^2+(y+\alpha)^2)^{3/2}}\right)- \\
& -m_5\left(\frac{x-\beta}{((x-\beta)^2+(y-\gamma)^2)^{3/2}}+\frac{x+\beta}{((x+\beta)^2+(y-\gamma)^2)^{3/2}}+\right. \\
& \left.+\frac{x+\beta}{((x+\beta)^2+(y+\gamma)^2)^{3/2}}+\frac{x-\beta}{((x-\beta)^2+(y+\gamma)^2)^{3/2}}\right)=0,
\end{aligned} \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned}
g_8(x,y) &= \omega^2 y - \frac{m_0 y}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \\
& -m_1y\left(\frac{1}{((x-1)^2+y^2)^{3/2}}+\frac{1}{((x+1)^2+y^2)^{3/2}}\right)- \\
& -m_2\left(\frac{y-\alpha}{((x^2+(y-\alpha)^2)^{3/2}}+\frac{y+\alpha}{(x^2+(y+\alpha)^2)^{3/2}}\right)- \\
& -m_5\left(\frac{y-\gamma}{((x-\beta)^2+(y-\gamma)^2)^{3/2}}+\frac{y-\gamma}{((x+\beta)^2+(y-\gamma)^2)^{3/2}}+\right. \\
& \left.+\frac{y+\gamma}{((x+\beta)^2+(y+\gamma)^2)^{3/2}}+\frac{y+\gamma}{((x-\beta)^2+(y+\gamma)^2)^{3/2}}\right)=0.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

При заданных значениях геометрических параметров, $\alpha=0.627$, $\beta=0.8$, $\gamma=0.6$ и $m_0=1$, были вычислены значения динамических параметров, которые оказались равными, $m_1=2.472648$, $m_2=8.954232$, $m_5=5.233848$, а величина угловой скорости равна $\omega=4,852131$.

Для этого конкретного случая, на рисунке 50 изображены графики функций $f_8(x,y)=0$ (сплошная линия) и $g_8(x,y)=0$ (пунктирная линия), а точки пересечения этих кривых, очевидно, представляют собой положения равновесия (стационарные решения) дифференциальных уравнений ограниченной проблемы 10-ти тел, «рожденной» гравитацией прямоугольника и ромба. Последние вращаются вокруг общего центра с угловой скоростью ω , определенной, согласно формуле (2.50).

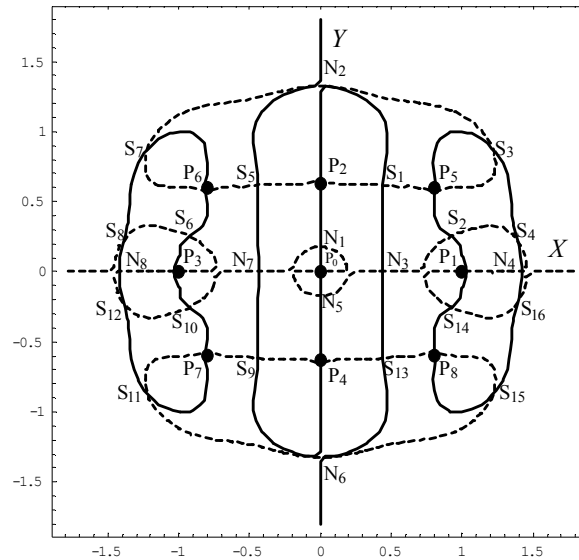


Рис. 50

Из рисунка 50 видно, что для данного набора значений параметров имеется 24 стационарные точки, являющиеся точными частными решениями типа «положений равновесия» дифференциальных уравнений ограниченной проблемы 10-и тел, «порожденной» гравитирующим ромбом и гравитирующим прямоугольником.

Действительно, рассматривая более детально рис. 50, видно, что на нем изображены две кривые, описываемые уравнениями (2.55) и (2.56), и, далее, видны четыре положения равновесия на координатной оси P_0x (точки N_3, N_4, N_7, N_8), четыре положения — на оси P_0y (точки N_1, N_2, N_5, N_6), причем два из них находятся на «положительных» полуосях, а два положения равновесия — на «отрицательных» полуосях, симметрично относительно начала координат. Кроме того, четыре положения равновесия находятся в первой четверти координатной плоскости, а другие положения равновесия расположены попарно симметрично относительно осей координат.

п.2.11. ОГРАНИЧЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ОДИННАДЦАТИ ТЕЛ

Названные в заголовке динамические модели суть следствия следующих известных точных решений общей ньютоновой проблемы 10-ти тел :

- 1) правильный гравитирующий десятиугольник с равными массами $m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m_6=m_7=m_8=m_9=m_{10}=m$ в вершинах, вращающийся в своей плоскости вокруг своего центра с угловой скоростью (1.75), приведенной в п.1.14;
- 2) правильный, вращающийся в своей плоскости с однозначно определенной угловой скоростью, гравитирующий девятиугольник с равными массами $m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m_6=m_7=m_8=m_9=m$ в вершинах и с любой массой m_0 в центре;
- 3) два концентрических правильных, вращающихся, вокруг своего центра, пятиугольника «без относительного поворота» одного относительно другого, с равными массами в вершинах, $m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m$, $m_6=m_7=m_8=m_9=m_{10}=m^*$ или второй случай – с их поворотом один относительно другого, на угол $\pi/5$;
- 4) динамическая модель, рассмотренная Н.И.Земцовой [99,100], состоящая из концентрических правильного шестиугольника и равностороннего треугольника с произвольной массой m_0 в центре, не равной нулю (рис.51).

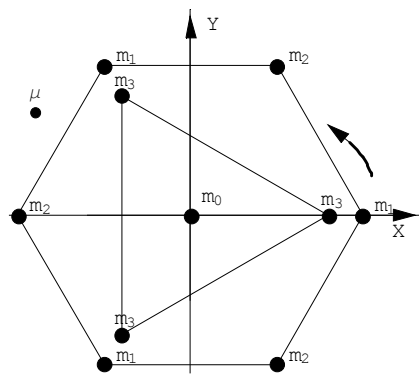


Рис. 51.

Мы здесь привели лишь одно геометрическое изображение, найденное Н.И. Земцовой, а именно изображение ограниченной проблемы одиннадцати тел, порожденной ньютоновой гравитацией десяти материальных точек с отличными от нуля массами, расположенными в вершинах регулярного шестиугольника, в вершинах равностороннего треугольника и в центре всей конфигурации. Геометрическое изображение трех других динамических моделей достаточно очевидно.

Соответствующие точные алгебраические соотношения, связывающие динамические и геометрические параметры для этих динамических моделей приведены в публикациях [99–101].

п.2.12. ОГРАНИЧЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ДВЕНАДЦАТИ ТЕЛ

Согласно изложенному выше алгоритму, такие динамические модели могут появиться, благодаря существованию известных точных частных решений проблемы одиннадцати тел, каковыми, например, являются:

- 1) точное частное решение ньютоновой проблемы одиннадцати тел, геометрически изображаемое равномерно вращающимся в своей плоскости вокруг своего центра правильным одиннадцати угольником с равными между собой массами в вершинах, $m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m_6=m_7=m_8=m_9=m_{10}=m_{11}=m$;
- 2) точное частное решение проблемы одиннадцати тел, геометрически изображаемое правильным, равномерно вращающимся, вокруг своего динамического центра с массой m_0 , десятиугольником, в вершинах которого находятся равные между собой массы $m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=m_6=m_7=m_8=m_9=m_{10}=m$.

Последние две конфигурации состоят из двух концентрических регулярных пятиугольников с общим гравитационным центром, в котором имеется произвольная масса m_0 , но в первом слу-

чае угловой сдвиг одного пятиугольника относительно второго отсутствует, а во втором варианте имеется относительный угловой сдвиг, равный $\pi/5$.

Сами аналитические условия, гарантирующие существование ограниченных проблем 12-ти тел на базе гравитационных моделей 11-ти тел, изображенных на рис. 52, без особого труда могут быть получены с помощью аналитических соотношений, приведенных в п.1.7. Напомним, что они выражают достаточные условия существования положений равновесия в ньютоновой проблеме многих тел во *вращающихся системах координат*.

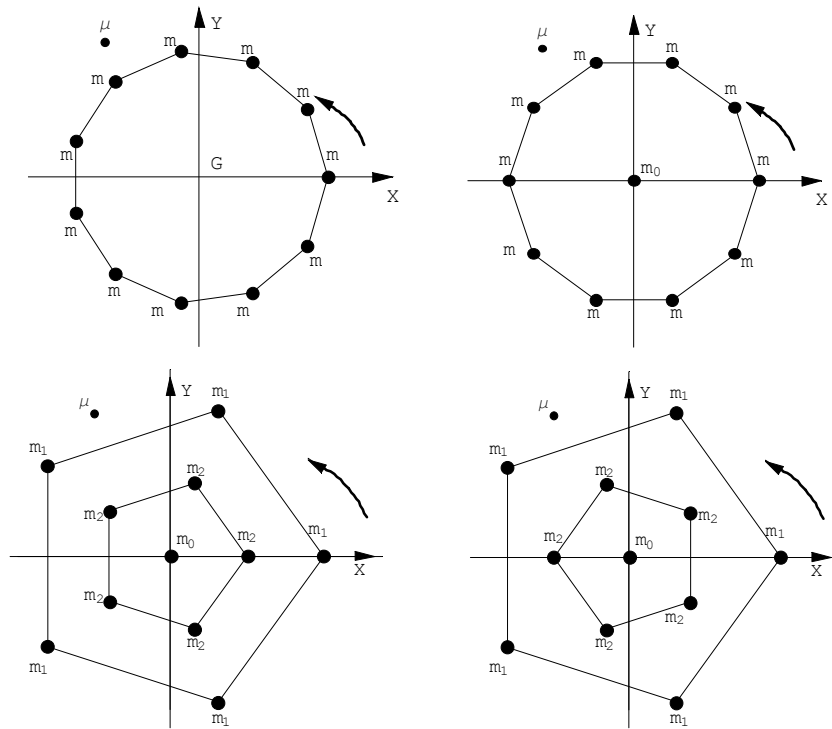


Рис. 52.

п.2.13. КРАТКОЕ ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Введение понятия «ограниченная задача $n > 3$ тел» столь же обосновано, что и введение в научные исследования, Карлом Якоби, понятия «ограниченная проблема трех тел». В середине 19-го столетия оно было непривычным и неестественным для многих астрономов, математиков и механиков, но жизнь показала, что оно было, по меньшей мере, очень полезным в космодинамике и теоретической физике 20-го столетия. Достаточно вспомнить важное значение ограниченной задачи трех тел при моделировании полетных и перелетных траекторий космических аппаратов, использованных ранее и используемых сегодня в масштабах Солнечной системы. Многие расчеты, связанные с освоением космического пространства в пределах Солнечной системы, базирующиеся на динамической модели – «ограниченной проблеме трех тел» были просто необходимы для осуществления запусков космических объектов в направлении других объектов в Солнечной системе.

Существует достаточно обоснованная надежда на то, что и другие динамические модели ограниченных ньютоновых задач с большим числом активно гравитирующих компонент окажутся востребованными, по меньшей мере, в космодинамике 21-го столетия.

ГЛАВА 3. ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ ГОМОГРАФИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОГРАНИЧЕННЫХ НЬЮТОНОВЫХ ПРОБЛЕМ

п.3.1. ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ

Существует множество определений и трактовок понятия «устойчивость решения» дифференциального уравнения. Весьма распространено в математической литературе и другое понятие, эквивалентное первому, «устойчивость движения» динамической системы. Первый термин чаще используется в математических исследованиях, второй применяется достаточно часто специалистами, работающими в прикладных науках, прежде всего, в механике и физике и конечно, во многих прикладных областях технических наук.

Существенное развитие этого большого раздела современной математики, известного под названием «теория устойчивости» началось с основополагающих работ А.М. Ляпунова [81,82], хотя, фигурально выражаясь, математическое поле с посевами теории устойчивости, и до Александра Михайловича Ляпунова не было заброшенным. Достаточно напомнить читателю математические исследования, прежде всего, Эйлера, Лагранжа, Лапласа, Пуассона и, конечно, Пуанкаре [11,27,112,116,118] по устойчивости планетных орбит, в частности, и динамических систем, в целом, составляющими которых являются взаимно гравитирующие материальные точки.

Сегодня невозможно встретить серьезные исследования теоретического и прикладного характера по физике, механике, астрономии и другим разделам естествознания, в которых не обсуждается проблема устойчивости нелинейных процессов самой различной природы.

В математической литературе можно встретить *более ста определений понятия устойчивости*. Подтверждением этого служит, например, статья профессора Московского Университета, Моисеева Николая Дмитриевича [118,119], написанная в середине прошлого столетия, в которой приведена классификация определений понятия устойчивости, используемых в то время в исследованиях по космической динамике. Оказалось, что в середине 20-го века, в исследованиях по космической динамике использовалось ни много, ни мало, около тридцати таких определений.

Возвращаясь в прошлое, отметим, что до конца 19-го столетия, да и в 20-ом столетии, весьма популярным направлением в качественной теории дифференциальных уравнений космической динамики, были исследования, посвященные «устойчивости по Пуассону» их решений, которые, в принципе, существенно способствовали накоплению знаний по проблеме устойчивости таких моделей для Солнечной системы.

Эта ситуация в определенной степени отражала математические и философские взгляды Пуанкаре, *который считал, что проблема устойчивости по Пуассону является одной из трех, наиболее важных математических проблем в теории обыкновенных дифференциальных уравнений в целом, и в гамильтоновой динамике, в частности*. Пуанкаре многократно подчеркивал, что *ньютонова проблема трех тел является типичной*, и вместе с тем, *одной из самых сложных моделей гамильтоновой динамики* [11].

Можно надеяться, что, с помощью дальнейших исследований проблемы «устойчивости по Пуассону», а также привлекая богатство теории устойчивости по Ляпунову и устойчивости «в смысле КАМ-теории» [84-88], возможно будет продвинуть решение проблемы устойчивости динамических моделей для Солнечной системы, быть может, не только в указанных выше *интерпретациях понятия устойчивости*, но и в иных «толкованиях» этого термина.

Ситуация была бы идеальной, если математические методы позволяли бы «точно проинтегрировать дифференциальные уравнения ньютоновой проблемы многих тел», но это пока «не случи-

лось» и вряд ли может когда нибудь случиться, если подразумевать под этим «их интегрирование в квадратурах». Поэтому нам остается, как написано в предыдущих главах, *«организовать поиск любых их частных решений»* и, в первую очередь, поиск периодических и условно-периодических решений дифференциальных уравнений космической динамики [114, 115, 116, 121].

Напомним, что любое положение равновесия проблемы n -тел во «вращающейся системе координат» представляет собой простейшее периодическое решение ньютоновой проблемы многих тел в инерциальной системе координат «без вращения».

Возвращаясь к истории вопроса, можно сказать, что само слово «устойчивость» в ежедневном обиходе имеет, наверное, такой же срок давности, что и сама человеческая речь, но применение его в научных дискуссиях и спорах, следует считать, по всей вероятности, античную эпоху, когда жил Клавдий Птолемей. Представляется маловероятным процесс обсуждения древними мудрецами видимой ими Вселенной, без обсуждения вопроса о ее возрасте и ее размерах. Трудно вести беседы и научные дискуссии о Мироздании без использования терминов «вечность», «конечность во времени и в пространстве», «устойчивость» или каких-либо их синонимов.

Если же рассматривать *«оформление» теории устойчивости в математическую теорию*, это произошло, благодаря, работам многих выдающихся математиков и физиков прошлого, которые были «обобщены» и развиты выдающимся русским математиком и механиком Александром Михайловичем Ляпуновым, «прошедшим школу» другого знаменитого русского математика, П.Л. Чебышева. Он оказался продолжателем признанных авторитетов в точных науках, прежде всего, Ньютона, Лагранжа, Лапласа, Гаусса, Пуассона, Максвелла и Пуанкаре, которые внесли существенный вклад в создание и развитие математической теории устойчивости.

А.М. Ляпунову принадлежит математически корректная формулировка самого термина «устойчивость решения» диффе-

ренциального уравнения и формулировка проблемы устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений [81]. Им также разработаны достаточно эффективные математические методы исследования свойства устойчивости динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Кроме того, Ляпунов сформулировал и разработал два, отличных друг от друга, подхода к решению этой фундаментальной проблемы математики и в настоящее время принято говорить о двух «методах Ляпунова» исследования устойчивости решений обыкновенных дифференциальных уравнений [27, 81–87]:

- 1) метод *V-функций* Ляпунова;
- 2) метод, основанный на свойствах линейного приближения.

Вместе с тем приходится констатировать и тот факт, что *ньютонова проблема многих тел*, с точки зрения исследования свойств устойчивости ее решений, *оказалась одной из наиболее трудных проблем современной математики* и она весьма далека от того состояния, которое принято называть, что она «в основном», или «почти» решена.

Оказалось, что теория устойчивости, созданная А.М. Ляпуновым и его последователями, имеющая значительные заслуги, например, при проектировании новых агрегатов и самой разнообразной аппаратуры, сегодня, напрямую, еще не может быть эффективно использована в исследованиях по устойчивости динамики космогонических или космологических структур, к которым, в частности, относятся планетарные системы, естественные и искусственные спутниковые системы. Можно сказать, что эти пессимистические моменты были для автора важным стимулятором написания данной книги, которая, быть может, привлечет к нерешенным математическим проблемам космической динамики исследователей нашего времени, имеющих в своем распоряжении «новую математику» и «супер-компьютеры» 4-го, 5-го и более поздних поколений.

п.3.2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Приведем, прежде всего, определение устойчивости решений дифференциальных уравнений по Ляпунову [27,82,83].

Пусть задано векторное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = X(x, t), \quad (3.1)$$

где n -мерная вектор-функция $X(x, t)$ определена в некоторой $(n+1)$ -мерной области $G_{n+1} = G_n \times I$, $t \in I = (0, \infty)$, $x \in G_n$, где G_n – область в n -мерном пространстве R^n .

Предположим, что векторное уравнение (3.1) имеет известное частное решение $x = x^*(t)$, которое мы назовем «невозмущенным решением», а все другие его решения назовем «возмущенными решениями».

Определение 1. Частное решение $x^*(t)$ системы дифференциальных уравнений (3.1) называется устойчивым по Ляпунову по отношению к вектору x , если для любого числа $\varepsilon > 0$ и любого t_0 из бесконечного интервала $(0, \infty)$ существует величина $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такая, что выполняются следующие условия:

1) все решения $x(t)$, удовлетворяющие начальному условию

$$x(t_0) = x, \|x(t_0) - x^*(t_0)\| < \delta, \quad (3.2)$$

определены в бесконечном интервале $t_0 \leq t < \infty$;

2) для этих решений справедливо неравенство

$$\|x(t) - x^*(t)\| < \varepsilon \quad (3.3)$$

при всех значениях $t_0 \leq t < \infty$.

Здесь норма любого вектора $x(t)$ понимается как сумма абсолютных величин его компонент, то есть

$$\|x(t)\| = \sum_{k=1}^n |x_k(t)|.$$

Замечание. В настоящее время в определении устойчивости слова «по отношению к вектору x » обычно не приводятся.

Определение 2. Если величина $\delta = \delta(\varepsilon)$ не зависит от начального момента времени t_0 из интервала $[0, T]$ и выполняются остальные условия из определения 1, тогда решение $x^*(t)$ называется *равномерно устойчивым в области T* .

Определение 3. Решение $x^*(t)$ называется *асимптотически устойчивым при $t \rightarrow \infty$* , если оно устойчиво и к тому же для любого значения t_0 из бесконечного интервала $[a, \infty)$ существует величина $\Delta = \Delta(t_0)$ такая, что все решения $x(t)$, удовлетворяющие начальному условию $\|x(t_0) - x^*(t_0)\| < \Delta$, обладают также свойством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x^*(t)\| = 0. \quad (3.4)$$

В частности, тривиальное решение $x^*(t) \equiv 0$ *асимптотически устойчиво*, если оно устойчиво и ее предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x^*(t)\| = 0. \quad (3.5)$$

Приведем ниже и другие определения, которые могут оказаться полезными в дальнейшем.

Определение 4. Геометрическая конструкция, n -мерный шар $\|x\| < \Delta(t_0)$ при фиксированном значении t называется *областью притяжения* положения равновесия – тривиального решения $x^*(t) \equiv 0$, изображаемого началом координат в декартовой системе координат $Ox_1x_2\dots x_n$.

Определение 5. Если область определения G_n вектор-функции $f(x, t)$ совпадает со всем евклидовым пространством R_n и, кроме того, имеет место определение 3, а величина $\Delta = \infty$, тогда решение $x^*(t)$ называется асимптотически устойчивым в целом.

Определение 6. Решение $x^*(t)$ системы дифференциальных уравнений (3.1) называется устойчивым при постоянно действующих возмущениях $F(y, t)$, если для любых значений $\varepsilon > 0$ и t_0 из бесконечного интервала $(0, \infty)$ существует такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, что при $\|F(y, t)\| < \delta$ все решения $y(t)$ векторного дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dt} = X(y, t) + F(y, t) \quad (3.6)$$

удовлетворяющие начальному условию $\|y(t_0)\| < \delta$, определены в бесконечном интервале времени $t \in [t_0, \infty)$ и, кроме того, они должны удовлетворять для всех значений $t \geq t_0$ неравенству

$$\|y(t) - x^*(t)\| < \varepsilon. \quad (3.7)$$

Определение 7. Пусть G_n является областью конечных размеров в n -мерном евклидовом пространстве R_n . Это означает, что, для любых двух точек x и y , принадлежащих области G_n , норма

$$\|x - y\| < C, \quad (3.8)$$

где постоянная C является общей для любой пары x и y , принадлежащих n -мерной области G_n .

Определение 8. Частное решение $x^*(t)$ системы дифференциальных уравнений (3.1) называется устойчивым по Лагранжу в области G_n , если для него выполнены следующие неравенства:

$$\text{из } x^*(t_0) \in G_n \text{ следует } x^*(t) \in G_n \text{ для всех } t \geq t_0. \quad (3.9)$$

Устойчивость по Лагранжу фактически означает *ограниченность решения $x^*(t)$ для всех значений $t \geq t_0$ в области G_n* .

Определение 9. Частное решение $x^*(t)$ называется *устойчивым по Пуассону*, если точка M , описывающая траекторию, за бесконечное время проходит бесконечное число раз через сколь угодно малую окрестность начальной точки M_0 .

В исследованиях по космической динамике также можно встретить анализ и других свойств качества устойчивости решений, и, в первую очередь, *свойство устойчивости «по Хиллу»* [120] и *свойство устойчивости «в смысле Якоби»* [27,118].

П.3.3. ТЕОРЕМА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Предположим, что правая часть системы дифференциальных уравнений (3.1), вектор-функция $X(x,t)$ в окрестности нулевого решения $x^*=0$ представима в виде

$$X(x,t) = Ax + \varphi(x,t) \quad (3.10)$$

где A – постоянная $(n \times n)$ -матрица, а вектор-функция $\varphi(x,t)$ такова, что при $x \rightarrow 0$, *равномерно по x* , величина $\frac{\|\varphi(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0$.

Для применения первого метода Ляпунова, правую часть системы (3.1), очевидно заранее следует представить в виде (3.10), то есть заранее необходимо *выделить в ее правой части линейную и нелинейную относительно x компоненты*.

Тогда справедлива *основная теорема Первого метода Ляпунова*.

Теорема 1. *Если все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части, тогда тривиальное решение $x^*=0$ системы (3.10) асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова при $t \rightarrow +\infty$.*

Выше было сказано, что эта теорема является основой так называемого *Первого Метода Ляпунова* [82,87] и, естественно, используется всюду, где выполняются ее условия.

В частности, она используется при исследовании устойчивости динамических процессов, в которых, наряду с силами гравитации, действуют, например, силы трения и силы управления, а также при проектировании новой техники в широком смысле этого термина (то есть, при конструировании самых разнообразных технических макро- и микроизделий и систем) и, конечно, при исследовании надежности работы аппаратуры, используемой, например, в космических экспериментах.

В этих случаях конструктор сам диктует условия, которым должны удовлетворять технические параметры или «допуски», гарантирующие в будущем устойчивую работу проектируемого технического изделия, или исследователь должен «Опроектировать» такое изделие, которое не только учитывает, но и определяется правилами, управляющими функционированием и динамикой создаваемого космического объекта.

Но, к сожалению, приведенная выше теорема Первого метода Ляпунова не может быть использована непосредственно при исследовании устойчивости в смысле Ляпунова решений дифференциальных уравнений ньютоновой проблемы многих тел. В частности, она не может быть использована для исследования ляпуновской устойчивости математических моделей, описывающих Солнечную систему в рамках гамильтоновой динамики.

п.3.4. ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ МАТРИЦ

Приведенный выше отрицательный результат вытекает из особых свойств матрицы линейной части разложения любой автономной гамильтоновой системы с аналитическим гамильтонианом, в окрестности ее положения равновесия $x=0$.

Дело в том, что матрица любой автономной однородной гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2n$, с нулевым решением $x=0$, очевидно всегда имеет четный порядок и к тому же является матрицей симплектической.

В соответствии с определением симплектической матрицы [114,116], это такая невырожденная матрица четного порядка, $2n$, которая в конечном итоге может быть представлена в следующем стандартном виде

$$A_{2n} = \begin{pmatrix} 0_n & E_n \\ -E_n & 0_n \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

где 0_n и E_n – нулевая и единичная матрицы n -го порядка соответственно. Такие матрицы обладают многими интересными свойствами, но главное из них заключается в том, что, при исследовании устойчивости решений систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с такой матрицей, характеристическое уравнение [41,44], всегда представляет собой равный нулю алгебраический полином, состоящий только из четных степеней характеристических показателей, то есть оно всегда имеет следующую алгебраическую структуру:

$$a_0\lambda^{2n} + a_1\lambda^{2n-2} + a_2\lambda^{2n-4} + \dots + a_n = 0. \quad (3.12)$$

Отсюда следует, что все собственные значения любой симплектической матрицы (а число корней этого уравнения равно $2n$) попарно равны между собой по абсолютной величине и противоположны по знаку.

Что следует из этого условия?

Допустим, что $\lambda^2 = a$, где $a > 0$. Тогда $\lambda_1 = +\sqrt{a}$, $\lambda_2 = -\sqrt{a}$, и поскольку величина $\lambda_1 > 0$, нулевое решение $x = 0$ будет неустойчивым, так как функция $e^{\lambda_1 t}$, входящая в структуру общего решения первоначальной линейной гамильтоновой системы, будет неограниченно возрастать.

Предположим теперь, что две комплексно сопряженные величины $\lambda_k^2 = a + bi$ и $\lambda_{\bar{k}}^2 = a - bi$, где $a \neq 0$, являются корнями уравнения n -ой степени уравнения (3.12). Тогда величины λ_k и $\lambda_{\bar{k}}$ также обязательно являются комплексными сопряженными числами, то есть они не могут быть, во-первых, «чисто мнимыми» числами, а, во-вторых, их вещественные части будут равными по абсолютной величине, но будут иметь противоположные знаки.

Следовательно, для того, чтобы все собственные значения характеристического уравнения (3.12) были чисто мнимыми числами, необходимо и достаточно чтобы все их «квадраты», то есть все, без исключения, величины $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_n^2$, *обязаны быть отрицательными числами*. Только в этом случае все собственные значения любой линейной гамильтоновой системы дифференциальных уравнений (в нашем конкретном случае их число равно $2n$) будут чисто мнимыми величинами.

Следовательно, справедлив следующий вывод.

Вывод. Для того, чтобы положение равновесия (которое мы всегда можем считать началом координат, $x=y=0$) любой однородной линейной автономной гамильтоновой системы было устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы, определяющей данную линейную систему, были простыми, попарно различными, чисто мнимыми числами.

Отсюда неизбежно следует, что исследование устойчивости по Ляпунову, любого стационарного решения (положения равновесия) дифференциальных уравнений ньютоновой проблемы мно-

гих тел, на основе прямого применения Первого метода Ляпунова не представляется возможным.

Что касается применения Второго метода Ляпунова, в принципе его использование возможно, если, конечно, удастся «найти» для каждой задачи соответствующую функцию *V-Ляпунова*, фактический поиск которой для проблем космической динамики находится, можно сказать, в самой начальной стадии его разработки.

Приведенные соображения говорят в пользу создания *новых методов* исследования ляпуновской устойчивости решений гамильтоновых систем, что и было сделано тремя выдающимися учеными, российскими академиками, А.Н. Колмогоровым и В.И. Арнольдом и немецким профессором, Ю. Мозером. Среди математиков, механиков и физиков-теоретиков принято справедливо считать названных выше ученых *основателями КАМ-теории*.

Написанную аббревиатуру можно расшифровывать как «*Теорию А.Н.Колмогорова, В.И.Арнольда и Ю.Мозера существования многочастотных, условно-периодических решений гамильтоновых систем дифференциальных уравнений, заданных на многомерных торах*» [43,44,114-116,126].

Чтобы лучше понимать о чем идет речь, предлагаем читателю следующий «мыслительный» эксперимент.

Представим себе *двумерный тор*, то есть *поверхность* обычного бублика и его «обмотку», понимая под этим динамический процесс «покрытия» его поверхности ниткой бесконечной длины.

Математическая проблема состоит в том, чтобы *найти те математические условия*, при выполнении которых движущаяся точка, представляющая собой «начало» воображаемой нити бесконечной длины, непрерывно и бесконечно долго движется по поверхности тора. Очевидно, за бесконечное время может реализоваться одна из двух следующих возможных ситуаций:

1) Либо через какое-то *конечное* число оборотов по «долготе» тора и какое-то число оборотов по «широте» тора (эти числа могут быть различными) «бегающая» точка может оказаться в на-

чальной точке через некоторый, конечный отрезок времени. Тогда при дальнейшем движении по тору, она снова в точности повторит предыдущие витки и за бесконечное время она будет повторять свое движение бесконечное число раз по одной и той же замкнутой траектории.

В такой ситуации можно сказать, что *движущаяся точка совершает периодическое движение на поверхности тора, и при этом «никакая обмотка тора не появляется»*.

2) Но может быть и другая ситуация. Движущаяся точка *за любой, но конечный промежуток времени **никогда*** не попадет в «начальную» точку и тогда за бесконечное время движущаяся точка окажется в любой, сколь угодно малой окрестности, любой точки на торе. Тогда мы утверждаем, что имеем «всюду плотную обмотку тора».

Сказанные слова можно интерпретировать и по-другому, а именно. Для сколь угодно малой окрестности любой точки на поверхности тора всегда наступает такой, быть может сколь угодно большой, но конечный момент времени, что движущаяся точка обязательно «попадет» в любую, сколь угодно малую, заданную окрестность любой точки на поверхности тора.

В первом случае мы говорим о *периодическом решении на торе*, во втором случае мы говорим об *условно-периодическом*, или *почти периодическом движении точки на торе*, и как следствие последнего, *получаем почти всюду плотную «обмотку» тора за бесконечное время*.

На языке высшей математики, или конкретнее на «языке дифференциальных уравнений» это означает, что мы должны иметь в своем распоряжении «теоремы существования периодических, условно-периодических, или почти-периодических решений гамильтоновых уравнений».

Многие трудности, которые возникают в гамильтоновой динамике, суть следствия, порожденные свойствами множества вещественных чисел, которые, как известно, составляют «множе-

ство-континуум», а его геометрическое изображение – это бесконечная «числовая» прямая, $(-\infty, +\infty)$, или любой ее конечный по длине отрезок (например, числовой отрезок $[0,1]$ – все числа «от нуля до единицы», включая и ноль и единицу, или отрезок на числовой оси длиной в «три единицы», $[5,8]$ – «все числа от пяти до восьми», которые также являются множествами-«континуумами») [122].

КАМ-теория дала определенный ответ на сформулированный выше вопрос, о чем написано ниже, а теперь вернемся к проблеме устойчивости динамических моделей космической динамики и изложим наиболее интересные результаты, полученные до настоящего времени.

п.3.5. ТЕОРЕМЫ ЛАГРАНЖА-ЛАПЛАСА, ПУАССОНА, АРНОЛЬДА

Рассмотрим сначала так называемый «планетный вариант» ньютоновой проблемы многих тел, то есть будем считать, что среди материальных точек $P_0, P_1, \dots, P_n$ с массами $m_0, m_1, \dots, m_n$ величина m_0 существенно больше остальных масс ($m_0 \gg m_k$, $k=1,2,\dots,n$) и движения материальных точек (планет) $P_1, P_2, \dots, P_n$ происходят по замкнутым орбитам, близким к круговым, вокруг массивной материальной точки P_0 (Солнца).

Допустим также, что *средние угловые скорости* (синонимом этого термина является выражение «*средние движения*» [27]) *рационально несоизмеримы между собой*, то есть будем считать, что угловые скорости «планет» $P_1, P_2, \dots, P_n$, величины $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ удовлетворяют неравенству

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 + \dots + k_n\omega_n \neq 0 \quad (3.13)$$

для всех целочисленных k_i , не равных нулю.

Тогда справедливы следующие теоремы [27].

Теорема Лагранжа-Лапласа. *Если невозмущенные угловые скорости планет несоизмеримы между собой, то большие полуоси планетных орбит в первом приближении изменяются колеблющимся образом.*

Теорема Пуассона. *Если невозмущенные средние угловые скорости планет несоизмеримы между собой, тогда большие полуоси планетных орбит и во втором приближении не содержат «вековых слагаемых», растущим как линейные функции времени.*

Приведенные выше теоремы указывают лишь на ограниченность в пространстве планетных траекторий на ограниченном, хотя, быть может, весьма большом промежутке времени, но не позволяют исследовать качество устойчивости планетных орбит на бесконечных интервалах времени.

Под ограниченным промежутком времени подразумевается величина порядка «тысяч-миллионов» оборотов Юпитера вокруг Солнца, то есть величина порядка 100.000-10.000.000 «земных» лет, оценка для которой вытекает из «теорем обоснования методов усреднения для многочастотных систем обыкновенных дифференциальных уравнений» [123-125], которые являются обобщением классической теоремы Н.Н. Боголюбова [126] «об обосновании применимости метода усреднения к так называемым стандартным системам обыкновенных дифференциальных уравнений» на случай многочастотных систем дифференциальных уравнений с «быстрыми» и «медленными» переменными.

В указанных работах получены достаточные условия «ε-близости» точных решений дифференциальных уравнений многочастотных колебательных систем и решений соответствующих усредненных дифференциальных уравнений, определяемых одними и теми же, или близкими начальными условиями, на «больших» промежутках времени, порядка $1/\varepsilon$, где величина ε имеет порядок величины самой большой массы в «гипотетической» планетной системе (для Солнечной системы- это величина массы Юпитера в долях массы Солнца).

***Теорема Арнольда** [127]. Если массы планет, эксцентриситеты и наклоны их орбит достаточно малы (к плоскости эклиптики) для некоторого значения t_0 , тогда, для большинства (в смысле меры Лебега) начальных условий, движение планет имеет условно-периодический характер для всех вещественных значений времени, $(-\infty < t < +\infty)$ и мало отличается от условно-периодического решения со специально выбранными начальными условиями.*

Из приведенной теоремы вытекает, что для «большинства в смысле меры Лебега начальных условий» [122], любые приближения решений планетного варианта ньютоновой проблемы n тел (одна из масс этих n тел существенно больше остальных масс системы) устойчивы в смысле Лагранжа (то есть ограничены в фазовом пространстве для любого $t \geq 0$), но, естественно, *вопрос об устойчивости в смысле Ляпунова такой планетной системы остается открытым.*

В связи со столетием со дня рождения знаменитого математика, Анри Пуанкаре (выдающийся математик и физик-теоретик родился в 1854 году, а ушел из жизни в 1912 году), в середине прошлого века мировое сообщество математиков проявило огромный интерес к богатейшему научному наследию, оставшемуся для нас от выдающегося математика. Естественно, математики проявили особый интерес к тем проблемам, которые остались нерешенными после кончины великого ученого, в частности, к проблемам теоретической космической динамики.

Главная из них – это следующая, вечная для «землян», проблема: какова эволюция во времени космической среды для обитания человечества, каков возраст Солнечной системы и устойчива ли эта космогоническая структура с точки зрения ее длительного существования, или ее распада? Могут ли появиться такие возмущающие факторы, которые способны «разодрать» нашу обитель – Солнечную систему на части?

Ведь Солнечная система – не единственный объект в космических просторах, и, кроме того, она движется вокруг центра на-

шей Галактики с периодом времени, большем двухсот тысяч лет. Мало ли что может встретиться на этом неизведанном пути.

Список подобных вопросов можно во сто крат расширить и кажется, иной раз, что для нас, обитателей Земли, ситуация безысходная.

На самом деле ситуация немного оптимистичнее, чем кажется на первый взгляд, если знать и помнить о том, что такие великие математики как И. Ньютон, Ж. Лагранж, Л. Эйлер, П. Лаплас, К. Гаусс, Лобачевский, П. Чебышев, А. Пуанкаре, А.М. Ляпунов, А. Эйнштейн, А.Н. Колмогоров и многие другие, *безгранично преданные идее познания, выдающиеся ученые создали основы современной математики, без деятельности которых исследование любых систем и структур (космогонических, космических, физических, биологических, социальных и многих других) не только не возможно, но и не мыслимо.*

Второе, более конкретное толкование аббревиатуры «КАМ-теория» является *«Теория А.Н. Колмогорова, В.И. Арнольда и Ю. Мозера существования почти-периодических (или условно-периодических [114,115]) решений гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений, заданных на многомерных торах».*

Эта теория, в частности, создавалась для исследования устойчивости по Ляпунову положений равновесия гамильтоновых систем, вообще, и гамильтоновых систем космической динамики, в частности. Она была и остается популярной среди ученых разных научных направлений, и, в первую очередь, у специалистов по космической динамике и устойчивости больших и «супер» больших гравитационных структур, с одной стороны, а также у специалистов, использующих понятие *хаоса* [129] в исследованиях видимой и «невидимой» нами Вселенной, с другой стороны. Поэтому нам представляется целесообразным вкратце описать ее исторический аспект.

п.3.6. ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ ПЛАНЕТНЫХ СИСТЕМ В «ДО КОМПЬЮТЕРНЫЙ ПЕРИОД»

До появления компьютерной математики и вычислительной техники, то есть до второй половины 20-го века, при исследовании динамической эволюции планетных систем, ученые использовали те результаты аналитической и качественной теорий обыкновенных дифференциальных уравнений, которые были тогда в их распоряжении.

Достаточно напомнить читателю о результатах Эйлера, Лагранжа, Лапласа и других классиков, связанных с *проблемой интегрируемости* обыкновенных дифференциальных уравнений, вообще и дифференциальных уравнений космической динамики, в частности.

Первым фундаментальным достижением математики того времени, имеющим универсальный характер, было появление *метода последовательных приближений*, или, как часто его называют, *методом итераций* [130,131]. Аналитический формализм в тот период времени получил большое развитие, однако проблема сходимости итераций при решении проблем космической динамики долго не поддавалась решению, а, следовательно, и проблема устойчивости космогонических структур считалась неприступной.

Более того, из-за существенных нелинейностей, которые неизбежно присутствуют в математическом описании ньютоновой проблемы многих тел (даже в случае проблемы двух тел) исследование сходимости рядов, которые использовались в трудах Лагранжа, Лапласа, Гаусса и других корифеев науки, оставалось неизученной проблемой.

Фактически только Хилл, во второй половине 19-го столетия, в своей теории движения Луны [132] математически корректно решил проблему сходимости рядов, представляющих движение Луны вокруг Земли.

Интересно отметить, что до Хилла, математиками были разработаны более десяти теорий движения Луны (великий Леонард Эйлер разработал даже две теории движения Луны, получившие Премии Французской Академии Наук), но ни одна из них *не была обоснованна с точки зрения математической корректности*, поскольку проблема сходимости последовательных приближений оставалась вне поля зрения авторов этих теорий.

Тем не менее поиски подходов, предложенных на протяжении последних двухсот лет математиками и физиками, обогатили математику, механику, физику и другие науки новыми идеями, методами и алгоритмами, которые использовались и тогда, и в настоящее время, при решении многих космогонических и космологических проблем. Ведь только на основе исследования аналитических свойств общего, или частного решений дифференциальных уравнений космогонической модели, можно *корректно сформулировать проблему об устойчивости той или иной динамической космогонической системы*.

Корректный, с математической точки зрения, ответ на утверждение о нахождении точных решений дифференциальных уравнений ньютоновой проблемы трех тел, представляет собой существенный результат, полученный, лишь в начале 20-го века, финским математиком К. Зундманом [133], который построил общее решение дифференциальных уравнений ньютоновой проблемы 3-х тел в виде специальных бесконечных степенных рядов, сходящихся на бесконечном интервале времени, то есть для всех значений $t \in [-\infty, +\infty]$.

К сожалению, этот изящный математический результат оказался бесполезным с точки зрения астрономической практики, поскольку воспользоваться *рядами Зундмана* для вычисления координат и скоростей двух гравитирующих тел (например, система тел, Солнце-Юпитер, Солнце-Земля и др.), как показал, в 30-х годах прошлого столетия французский математик Д. Белорицкий, практически не представляется возможным, из-за их «сверх медленной» сходимости [134].

Если представлять решение проблемы двух тел не в такой компактной форме, какую предложили еще Кеплер и Ньютон, а представить его с помощью рядов Зундмана, которые гарантировали бы ту же точность, тогда в этих рядах следует вычислить примерно 10^{80} членов, что не в силах осилить никаким современным компьютерам. В то же время, если для этого использовать знаменитое уравнение Кеплера [27], такие вычисления выполняются моментально, даже не прибегая к помощи компьютеров, а достаточно воспользоваться «Таблицами синусов и косинусов» [135].

Такие же возможности, очевидно, предоставляют и системы программирования *Maple* и *Mathematica*, поэтому конкретный поиск точных частных решений динамических моделей космической динамики можно «автоматизировать» то есть сделать его вычислительным автоматизированным процессом.

Мы ниже продемонстрируем, что исследование качества устойчивости или неустойчивости положений равновесия конкретных моделей ограниченных проблем многих тел, существование которых доказано во второй главе, становится, в достаточно большой степени, *рядовой задачей*, поскольку названные системы программирования «взваливают на свои плечи» выполнение всех алгебраических и арифметических операций над гамильтонианами в каждой динамической модели. Это тысячи и тысячи математических операций над достаточно громоздкими алгебраическими структурами, типа степенных, тригонометрических или «смешанных» рядов, которые приходилось раньше выполнять исследователям «в ручную».

Во второй половине 18-го столетия стало ясно, что проблема устойчивости решений дифференциальных уравнений космической динамики, которые позже стали называться *гамильтоновыми системами* (и как приложение, проблема устойчивости планетных систем) тесно связана с проблемой существования периодических и условно-периодических решений дифференциальных уравнений ньютоновой проблемы многих тел, что представляется достаточно естественным.

Ведь если математики смогли бы доказать сходимость бесконечных рядов (конечно рядов, отличных от рядов Зундмана), представляющих периодические или условно-периодические решения проблемы n тел объем вычислений в конкретных динамических моделях иногда мог уменьшиться в сотни, тысячи раз. Иллюстрацией к сказанному могут служить, например, две теоремы Лапласа и Пуассона, приведенные ниже.

Теорема Лапласа [27]. Пусть выполняются следующие условия:

- 1) движение всех планет в пространстве происходит в одном и том же направлении, а их массы по величине имеют один и тот же порядок;
- 2) большие полуоси орбит a_k являются колеблющимися и ограниченными функциями времени в некотором интервале времени (t_0, T) , мало изменяющимися около некоторых средних значений;
- 3) в начальный момент времени t_0 все эксцентриситеты и наклоны орбит планет $e_k(t_0)$, $i_k(t_0)$ достаточно малы.

Тогда эксцентриситеты и наклоны орбит планет, то есть функции $e_k(t)$ и $i_k(t)$ являются «малыми функциями» для всех значений времени t из некоторого конечного, но достаточно большого интервала времени (t_0, T) .

Теорема Лапласа, естественно, не гарантирует свойство устойчивости по Ляпунову гипотетической планетной системы. Более того, она не гарантирует даже ее устойчивость в смысле Лагранжа [136–138]. Она говорит лишь о том, что движение планет некоторой гипотетической динамической модели, состоящей из конечного числа взаимно притягивающих друг друга материальных точек на конечном, но, быть может, весьма большом интервале времени, имеет условно-периодический характер.

Пуассон, в свою очередь, исследовал одну из математических моделей планетной системы не только в первом, но и «во втором приближении» и показал, что большие полуоси планетных орбит,

во втором приближении, также не содержат в своей аналитической структуре вековые члены, пропорциональные времени t [137].

Следовательно, бесконечные ряды, которые формально удовлетворяют в первом и во втором приближениях дифференциальным уравнениям модели некоторой теоретической планетной системы, представляют, прежде всего, большие полуоси орбит в виде чисто тригонометрических рядов по функциям – синусам и косинусам кратных аргументов, зависящих линейно от времени t .

В. Арнольд в статье [138], касающейся эволюции в фазовом пространстве некоторой гипотетической динамической модели, в которой не только *эксцентриситеты и наклоны орбит планет достаточно малы* в некоторый момент t_0 , но и их *массы достаточно малы*, исследовал вопрос о динамическом характере поведения такой системы на больших интервалах времени и показал, что для большинства начальных условий (в смысле меры Лебега) *при всех вещественных значениях времени* $-\infty < t < \infty$, движение такой гипотетической планетной системы также имеет условно-периодический характер.

Изложим теперь еще один результат В. Арнольда [139], относящийся к так называемому *эллиптическому случаю* для гамильтоновой системы 4-го порядка, то есть для «плоской» гамильтоновой системы с «двумя степенями свободы».

Пусть задана следующая гамильтонова система

$$\begin{cases} \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, & \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \\ \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, & \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Пусть, кроме того, гамильтониан H представлен формулой

$$\begin{aligned} H(p_1, p_2, q_1, q_2) &= \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + H_0(r_1, r_2) + \tilde{H}(p_1, p_2, q_1, q_2), \\ H_0(r_1, r_2) &= \sum_{l_1+l_2=2}^n c_{l_1, l_2} r_1^{l_1} r_2^{l_2}, \quad \tilde{H} = O((r_1 + r_2)^{n+1}), \end{aligned} \quad (3.15)$$

где $r_i = (p_i^2 + q_i^2)/2$, $i=1,2$, а значение «невозмущенного» гамильтониана H_0 в точке $(\varepsilon\lambda_2, -\varepsilon\lambda_1)$ не равно нулю, то есть

$$h(\varepsilon) = H_0(\varepsilon\lambda_2 - \varepsilon\lambda_1) \neq 0 \quad (3.16)$$

Такой случай В. Арнольд называет *общим эллиптическим случаем* для гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Ниже приведем одно из его утверждений.

Теорема [139]. *Тривиальное решение (положение равновесия) $p_1=p_2=q_1=q_2=0$ автономной системы (3.14) с гамильтонианом (3.15) в общем эллиптическом случае устойчиво в смысле Ляпунова, если отношение собственных значений матрицы соответствующей линеаризованной системы λ_2/λ_1 принадлежит так называемому объединению всех точек плотности всех множеств Λ_k .*

Здесь символ Λ_k означает множество таких иррациональных чисел λ , для которых выполняется неравенство

$$|\lambda n - m| > \frac{k}{(m+n)^2}, \quad (3.17)$$

при всех целых значениях $m > 0$, $n > 0$.

Пусть, кроме того, величина Λ является объединением точек плотности всех множеств Λ_k . Им доказано, что множество всех вещественных чисел, не принадлежащих объединению Λ , имеет лебегову меру нуль.

Подчеркнем, что аналогичные результаты для гамильтоновых систем 6-го, 8-го и более высоких порядков на сегодняшний день еще неизвестны.

п.3.7. Устойчивость по Ляпунову ТРЕУГОЛЬНИКА ЛАГРАНЖА

Приведем сначала одно утверждение, которое может показаться не только неожиданным, но, в какой-то мере, нелогичным. Оно касается устойчивости по Ляпунову треугольника Лагранжа в абсолютной декартовой системе координат, или, что то же самое, в инерциальной декартовой системе координат.

Оно формулируется следующим образом: классический лагранжев треугольник, то есть точное частное решение ньютоновой проблемы 3-х тел с неравными нулю массами ($m_0 \neq 0$, $m_1 \neq 0$, $m_2 \neq 0$), найденное Лагранжем, *всегда неустойчив (или решение неустойчиво) в смысле Ляпунова*.

Действительно, если рассматривать свойство устойчивости (или, даже свойство ε -близости) решений дифференциальных уравнений, порожденных близкими начальными условиями в абсолютном (инерциальном) координатном пространстве, тогда «возмущенный» и «невозмущенный» треугольники Лагранжа будут удаляться друг от друга с возрастанием времени, *так как любые малые изменения начальных условий неизбежно приводят к неограниченному росту расстояния между центрами инерции «возмущенного» и «невозмущенного» треугольников*. Разности координат соответствующих вершин «возмущенного» и «невозмущенного» треугольников могут стать сколь угодно большими и это будет происходить, несмотря на то, что *сами конфигурации этих треугольников могут быть ε -близкими*. Это означает, что расстояние между самими треугольниками может стать сколь угодно большим.

Другими словами, прямые линии, по которым происходят движения центров инерции «невозмущенного» и «возмущенного» треугольников, *суть различные прямые*, и, следовательно, условия, входящие в математическом определении устойчивости по Ляпунову *в абсолютном движении* рассматриваемых треугольников, фактически никогда не могут быть выполнены.

Быть может, по этой причине Е. Раус [81] исследовал устойчивость в первом приближении постоянной треугольной конфигурации, образованной тремя гравитирующими телами, то есть *исследовал проблему орбитальной устойчивости периодического лагранжева решения, которая не является эквивалентной проблеме об устойчивости по Ляпунову лагранжева треугольного решения проблемы 3-х тел.*

Среди других важных результатов следует упомянуть доказательство Ляпуновым *устойчивости треугольника Лагранжа в первом приближении, при условии, что эксцентриситеты орбит его вершин меньше единицы и одна из трех масс существенно больше двух других.* Кроме того, им доказано [82], что для случая малых эксцентриситетов орбит его вершин, *лагранжев треугольник устойчив в первом приближении, если массы его вершин удовлетворяют известному неравенству*

$$\frac{(m_0 + m_1 + m_2)^2}{m_0 m_1 + m_0 m_2 + m_1 m_2} > 27. \quad (3.18)$$

Приведенное выше условие имеет место и для случая движения вершин треугольника Лагранжа по круговым орбитам.

Для ограниченной проблемы трех тел ($m_0 \neq 0, m_1 \neq 0, m_2 = 0$) неравенство (3.18), при $m_1 = \mu$ и $m_0 = 1 - \mu$ принимает более простой вид,

$$27\mu(1-\mu) < 1. \quad (3.19)$$

Оно понадобится нам в дальнейшем.

Подчеркнем, что в случае ограниченной проблемы 3-х тел подвергаются возмущениям только координаты и скорости нулевой массы, а активно гравитирующие массы не испытывают никаких возмущений со стороны «нулевой» массы.

Это одна из предпосылок, воодушевлявших математиков на исследование устойчивости именно в смысле Ляпунова треугольника Лагранжа, в одной из вершин которого располагается «нулевая» масса, то есть речь идет об устойчивости по Ляпунову треугольного решения Лагранжа ограниченной проблемы 3-х тел.

Опишем ниже основные известные результаты, относящиеся к этой проблеме.

Опираясь на теоремы В. Арнольда, А. Леонтович показал [140], что для всех значений масс m_0, m_1 , удовлетворяющих условию (3.19), кроме, быть может, множества лебеговой меры нуль, лагранжев треугольник, то есть частное решение ограниченной круговой проблемы трех тел, устойчиво в смысле Ляпунова.

В этом случае соответствующее характеристическое уравнение для ограниченной круговой проблемы трех тел,

$$\lambda^4 - \lambda^2 + \frac{27}{4}\mu(1-\mu) = 0 \quad (3.20)$$

будет иметь следующие решения:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}}, \quad (3.21)$$

$$\lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \sqrt{1 - 27\mu(1-\mu)}}, \quad (3.22)$$

На основании этих вычислений и, используя теорему Арнольда, А. Леонтович получил следующий существенный результат:

Точные решения дифференциальных уравнений ограниченной круговой проблемы 3-х тел, которые принято называть точками либрации L_4 и L_5 , устойчивы в смысле Ляпунова, если выражение $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 \neq 0$ (для любых целых чисел k_1 и k_2) и функция $\Phi \equiv \alpha\lambda_1^2 - \beta\lambda_1\lambda_2 + \gamma\lambda_2^2 \neq 0$ (где величины α, β, γ – некоторые постоянные коэффициенты).

Важное уточнение к результату Леонтовича сделал Ю.Мозер, который показал [141], что условие Арнольда, « $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 \neq 0$ для любых целых чисел k_1 и k_2 » может быть заменено существенно «более слабым» условием, а именно: *«неравенство $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 \neq 0$ должно быть выполненным только при значениях k_1 и k_2 , для которых, $0 < |k_1| + |k_2| \leq 4$ »*.

Таким образом, анализируя все перечисленные выше «ограничения», неизбежно возникает следующий вопрос:

При каких значениях параметра μ могут иметь место «противоположные» утверждения, чем те, которые приведены в теореме Леонтовича?

Следовательно, речь идет о тех значениях параметра μ , для которых очевидно должны совместно выполняться следующие условия:

$$k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = 0, \quad 0 < |k_1| + |k_2| \leq 4, \quad \alpha\lambda_1^2 - \beta\lambda_1\lambda_2 + \gamma\lambda_2^2 = 0. \quad (3.23)$$

Анализ этих условий показывает, что существуют только три значения параметра μ , удовлетворяющие условиям (3.23) [87]:

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{611}{675}} \right), \quad \mu_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{71}{75}} \right), \quad \mu_3 \approx 0,01091367. \quad (3.24)$$

Поскольку исследование ляпуновской устойчивости треугольника Лагранжа для этих трех значений параметра μ не может быть реализовано на основе приведенных выше теорем, эта проблема потребовала специального исследования, выполненного профессором А.П. Маркеевым [116]. Им доказано, что для значений параметра $\mu = \mu_1$, $\mu = \mu_2$ *лагранжев треугольник неустойчив*, а для значения $\mu = \mu_3$ *он представляет собой устойчивую по Ляпунову конфигурацию*.

п.3.8. ТЕОРЕМА АРНОЛЬДА-МОЗЕРА

Проблема ляпуновской устойчивости частных решений гамильтоновых систем является одной из наиболее трудных проблем качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, по той причине, что *гамильтоновы системы не относятся к классу так называемых грубых систем, для которых устойчивость в линейном приближении гарантирует и устойчивость по Ляпунову*. Лишь развитие КАМ-теории привело к значительным результатам в ляпуновской теории устойчивости решений гамильтоновых систем 4-го порядка и в теории существования условно-периодических решений гамильтоновых систем 4-го и более высокого порядков.

Что касается гамильтоновых систем 4-го порядка, в математической литературе хорошо известна теорема Арнольда–Мозера, многократно использованная исследователями в качественных исследованиях по космической и гомографической динамике. Приведем ее формулировку, заимствованную нами из работ профессора А.П.Маркеева [43,87].

Теорема Арнольда-Мозера. Пусть задана гамильтонова система 4-го порядка

$$\begin{aligned}\frac{dq_1}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \\ \frac{dq_2}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_2}, \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_2}\end{aligned}\tag{3.25}$$

с аналитическим по всем переменным гамильтонианом в окрестности начала координат ($q_1 = q_2 = p_1 = p_2 = 0$), которое является особой точкой типа положения равновесия системы (3.25).

Пусть, кроме того, существует каноническое преобразование

$$(q_1, q_2, p_1, p_2) \rightarrow (\psi_1, \psi_2, T_1, T_2),$$

в результате которого гамильтониан H преобразуется в следующий гамильтониан W :

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) \equiv W(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2),$$

где

$$W(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2) = W_2(T_1, T_2) + W_4(T_1, T_2) + W_5(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2), \quad (3.26)$$

$W_2 = \sigma_1 T_1 - \sigma_2 T_2$, $W_4 = c_{20} T_1^2 + c_{12} T_1 T_2 + c_{10} T_2^2$, $W_5(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2)$ – члены разложения гамильтониана $W(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2)$ не ниже 5-го порядка относительно канонических переменных.

Пусть, кроме того:

- 1) собственные значения матрицы системы, получающейся в результате линеаризации системы (3.25), являются мнимыми числами $i\sigma_1, i\sigma_2$;
- 2) $n_1 \sigma_1 + n_2 \sigma_2 \neq 0$, для целых чисел n_1, n_2 таких, что $|n_1| + |n_2| \leq 4$,
- 3) $c_{20} \sigma_2^2 + c_{12} \sigma_1 \sigma_2 + c_{10} \sigma_1^2 \neq 0$.

Тогда положение равновесия

$$T_1 = T_2 = \psi_1 = \psi_2 = 0$$

гамильтоновой системы

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_1}{dt} &= \frac{\partial W}{\partial T_1}, \frac{dT_1}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial \psi_1}, \\ \frac{d\psi_2}{dt} &= \frac{\partial W}{\partial T_2}, \frac{dT_2}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial \psi_2} \end{aligned} \quad (3.27)$$

с гамильтонианом (3.26) устойчиво в смысле Ляпунова.

Не приводя здесь доказательства теоремы, заметим, что она фактически содержит *алгоритм исследования устойчивости по Ляпунову стационарных решений гамильтоновой системы 4-го порядка*.

Важно отметить для дальнейшего, что положение равновесия $T_1 = T_2 = \psi_1 = \psi_2 = 0$ гамильтоновой системы (3.27) соответствует положению равновесия $q_1 = q_2 = p_1 = p_2 = 0$ гамильтоновой системы (3.25).

Подчеркнем также, что условия 2) и 3) теоремы Арнольда-Мозера фактически указывают на то, что исследование устойчивости положения равновесия гамильтоновых систем в «случае частотных резонансов» [123, 125] требует отдельного исследования.

П.3.9. ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ ОГРАНИЧЕННЫХ ПРОБЛЕМ

Опишем теперь основные этапы исследования ляпуновской устойчивости положений равновесия ограниченных проблем, которые должны быть реализованы в конкретных ситуациях. Заметим при этом, что, используемые в различных монографиях и научных статьях, термины «*нормальная форма*» или «*процедуры нормализации*» имеют множество интерпретаций, но мы, под нормальной формой дифференциальных уравнений, здесь подразумеваем *нормальную форму Биркгофа, или нормальную форму по Биркгофу*, [43,46,58].

Применительно к гамильтоновой динамике «нормальная форма гамильтониана по Биркгофу» означает, что *гамильтониан после цепочки канонических преобразований в конечном итоге должен будет зависеть только от «импульсов» (от переменных типа p), но не должен зависеть от фазовых «углов» (то есть от переменных типа q)*. Здесь мы используем символы для канонических переменных (p, q) , часто встречающиеся в учебниках по

теоретической механике и гамильтоновой динамике для университетов и инженерных высших учебных заведений в учебных курсах по динамике (в том числе и учебного курса по космической динамике), поэтому мы также воспользовались ими. Обычно вектор $\mathbf{p}$ означает совокупность импульсов, то есть величин, пропорциональных проекциям скоростей, а вектор $\mathbf{q}$ означает координаты (декартовы, криволинейные, угловые координаты) взаимно гравитирующих материальных точек [43,44, 58].

Исследование устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем небесной механики, естественно следует начинать с *определения (вычисления) координат* этих стационарных точек, которые, в случае взаимного ньютоновского гравитационного притяжения между материальными точками (телами) во вращающейся, относительно оси Gz , координатной плоскости Gxy с однозначно определенной угловой скоростью ω_n .

Далее опишем более подробно все этапы исследования проблемы устойчивости по Ляпунову на примере стационарных решений ограниченной ромбоподобной задачи 6-ти тел, выполненные Н.И. Земцовой [77,78].

Этап 1. Определение координат положений равновесия.

Все положения равновесия *ромбоподобной ограниченной задачи 6-ти тел*, описанной в п.2.6, определяются из нелинейной системы алгебраических уравнений (3.28), приведенной на следующей странице [78].

Обращаем внимание читателя на тот факт, что здесь угловая скорость, т.е. *величина ω считается известной*, так как она уже определена математическими средствами, описанными в первой главе.

Решение нелинейных алгебраических уравнений (3.28), относительно искомых координат положений равновесия, то есть относительно величин x, y в компактной аналитической форме, как правило, не представляется возможным, поэтому их нахождение

представляет собой специальную вычислительную задачу. Отметим лишь, что определение координат всех положений равновесия для конкретной динамической модели на всей координатной плоскости P_0xy возможно, лишь сочетая методы математического анализа с вычислительным экспериментом. К сожалению, неизвестны универсальные процедуры для решения подобных уравнений, особенно если искать их решения на всей координатной плоскости. Об этом можно прочитать, например, в монографии [46], в которой предложена и некоторая классификация положений равновесия, основанная на свойствах их устойчивости.

Система (3.28) имеет следующий аналитический вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega^2 x - \left(\frac{m_1(x-\alpha)}{((x-\alpha)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{m_2 x}{(x^2 + (y-1)^2)^{3/2}} + \right. \\ \left. + \frac{m_1(x+\alpha)}{((x+\alpha)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{m_2 x}{(x^2 + (y+1)^2)^{3/2}} \right) = 0, \\ \omega^2 y - \left(\frac{m_1 y}{((x-\alpha)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{m_2(y-1)}{(x^2 + (y-1)^2)^{3/2}} + \right. \\ \left. + \frac{m_1 y}{((x+\alpha)^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{m_2(y+1)}{(x^2 + (y+1)^2)^{3/2}} \right) = 0. \end{array} \right. \quad (3.28)$$

Этап 2. Линеаризация дифференциальных уравнений ограниченных задач в окрестности заданного положения равновесия.

После нахождения шести фазовых координат каждого из стационарных решений (т.е. величин $x^*, y^*, z^* = u^* = v^* = w^* \equiv 0$), необходимо выполнить процедуру линеаризации правых частей системы дифференциальных уравнений, написанных в указанных фазовых переменных.

Это обязательная процедура, так как в дальнейшем исследование устойчивости любого стационарного решения дифференциальных уравнений удобно выполнять для систем дифференциальных уравнений, написанных в форме Коши [23,24], *то есть их следует написать только в виде дифференциальных уравнений первого порядка*. Отметим, что *процедура линеаризации* правых частей дифференциальных уравнений прекрасно реализуется с помощью алгоритмов компьютерных алгебр [3–7].

В результате этого получаем систему линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (3.31)$$

где постоянная шестимерная матрица A уравнений для ньютоновой проблемы n тел имеет вид [46]:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_n & b_n & 0 & 0 & 2\omega_n & 0 \\ b_n & c_n & 0 & -2\omega_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_n & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Ненулевые элементы матрицы A , то есть величины a_n , b_n , c_n , d_n , ω_n для любого n (кроме небольших значений n , например, для $n=2,3,4,5$, что означают ограниченные задачи четырех, пяти, шести и семи тел) имеют трудно обозримый, но вполне достижимый, аналитический вид.

Ниже, в качестве иллюстрирующего примера, мы приводим аналитические выражения элементов матрицы A для *ограниченной проблемы шести тел*. Эти результаты получены Земцовой Н.И. [77,78].

Пояснение. Матрица (3.32) по «форме» не является симплектической [41,43], так как в упомянутом параграфе явно мы не пользовались свойствами гамильтонианов. Но это не является препятствием для выполнения всех необходимых алгебраических процедур, так как с помощью невырожденного линейного преобразования она легко приводится к матрице симплектической, а сами уравнения – к гамильтоновой форме.

По этой причине выводы, относящиеся к поведению решений гамильтоновых систем, также справедливы и для «не гамильтоновой» системы (3.31), и наоборот, исследование проблемы устойчивости стационарных решений системы (3.31) эквивалентно исследованию устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы, полученной из первой системы с помощью стандартных канонических преобразований.

Таким образом, рассматривается *ограниченная проблема шести тел*, геометрическая конфигурация которой состоит из ромба, с массами $m_1=m_3$, $m_2=m_4$ в вершинах, вращающегося вокруг своего центра (с массой m_0). Исследуется движение шестой точки с бесконечно малой массой μ в гравитационном поле, создаваемом ньютоновой гравитацией названных выше тел.

Хотим здесь подчеркнуть, что все приведенные здесь аналитические выражения получены в работах Земцовой Н.И. [78] методами компьютерной алгебры.

Для элементов основной матрицы A она получила следующие аналитические выражения:

$$\begin{aligned} a_4 = & \omega^2 + \frac{3x_i^{*2}}{(x_i^{*2} + y_i^{*2})^{5/2}} - \frac{1}{(x_i^{*2} + y_i^{*2})^{3/2}} + \frac{3x_i^{*2}m_1}{((x_i^* - \alpha)^2 + y_i^{*2})^{5/2}} - \\ & - \frac{6x_i^*\alpha m_1}{((x_i^* - \alpha)^2 + y_i^{*2})^{5/2}} + \frac{3\alpha m_1}{((x_i^* - \alpha)^2 + y_i^{*2})^{5/2}} - \frac{m_1}{((x_i^* - \alpha)^2 + y_i^{*2})^{3/2}} - \\ & - \frac{3x_i^{*2}m_2}{(x_i^{*2} + (y_i^* - 1)^2)^{5/2}} - \frac{m_2}{(x_i^{*2} + (y_i^* - 1)^2)^{5/2}} + \frac{3x_i^{*2}m_3}{((x_i^* + \alpha)^2 + y_i^{*2})^{5/2}} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{m_3}{((x_i^* + \alpha)^2 + y_i^{*2})^{3/2}} + \frac{6x_i^* \alpha m_3}{((x_i^* + \alpha)^2 + y_i^{*2})^{5/2}} + \frac{3\alpha^2 m_3}{((x_i^* + \alpha)^2 + y_i^{*2})^{5/2}} + \\
& + \frac{3x_i^{*2} m_4}{(x_i^{*2} + (y_i^* + 1)^2)^{5/2}} - \frac{m_4}{(x_i^{*2} + (y_i^* + 1)^2)^{5/2}}, \quad (3.33)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_4 = & \frac{3x_i^* y_i}{(x_i^{*2} + y_i^{*2})^{5/2}} + \frac{3x_i^* y_i m_1}{((x_i^* - \alpha)^2 + y_i^{*2})^{5/2}} - \frac{3y_i \alpha m_1}{((x_i^* - \alpha)^2 + y_i^{*2})^{5/2}} - \\
& - \frac{3x_i^* m_2}{(x_i^{*2} + (y_i^* - 1)^2)^{5/2}} + \frac{3x_i^* y_i^* m_2}{(x_i^{*2} + (y_i^* - 1)^2)^{5/2}} + \frac{3x_i^* y_i^* m_3}{((x_i^* + \alpha)^2 + y_i^{*2})^{5/2}} + \\
& + \frac{3\alpha y_i^* m_3}{((x_i^* + \alpha)^2 + y_i^{*2})^{5/2}} + \frac{3x_i^* m_4}{(x_i^{*2} + (y_i^* + 1)^2)^{5/2}} + \frac{3x_i^* y_i^* m_4}{(x_i^{*2} + (y_i^* + 1)^2)^{5/2}}, \quad (3.34)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_4 = & \omega^2 + \frac{3y_i^{*2}}{(x_i^{*2} + y_i^{*2})^{5/2}} - \frac{1}{(x_i^{*2} + y_i^{*2})^{3/2}} + \frac{3y_i^{*2} m_1}{((x_i^* - \alpha)^2 + y_i^{*2})^{5/2}} - \\
& - \frac{m_1}{((x_i^* - \alpha)^2 + y_i^{*2})^{3/2}} + \frac{3m_2}{(x_i^{*2} + (y_i^* - 1)^2)^{5/2}} - \frac{m_2}{(x_i^{*2} + (y_i^* - 1)^2)^{5/2}} - \\
& - \frac{6y_i^* m_2}{(x_i^{*2} + (y_i^* - 1)^2)^{5/2}} + \frac{3y_i^* m_2}{(x_i^{*2} + (y_i^* - 1)^2)^{5/2}} + \frac{3y_i^{*2} m_3}{((x_i^* + \alpha)^2 + y_i^{*2})^{5/2}} - \\
& - \frac{m_3}{((x_i^* + \alpha)^2 + y_i^{*2})^{3/2}} + \frac{3m_4}{(x_i^{*2} + (y_i^* + 1)^2)^{5/2}} - \frac{m_4}{(x_i^{*2} + (y_i^* + 1)^2)^{3/2}} + \\
& + \frac{6y_i^* m_4}{(x_i^{*2} + (y_i^* + 1)^2)^{5/2}} + \frac{3y_i^* m_4}{(x_i^{*2} + (y_i^* + 1)^2)^{5/2}}, \quad (3.35)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_4 = & -\frac{1}{(x_i^{*2} + y_i^{*2})^{3/2}} - \frac{m_1}{((x_i^* - \alpha)^2 + y_i^{*2})^{3/2}} - \frac{m_2}{(x_i^{*2} + (y_i^* - 1)^2)^{3/2}} - \\
& - \frac{m_3}{((x_i^* + \alpha)^2 + y_i^{*2})^{3/2}} - \frac{m_4}{(x_i^{*2} + (y_i^* + 1)^2)^{3/2}}. \quad (3.36)
\end{aligned}$$

Напомним, что величины x_i^*, y_i^* являются координатами любого из положений равновесия в исследуемой динамической модели.

Этап 3. Определение собственных значений матрицы A линеаризованной системы

Дальше необходимо подставить полученные выражения (3.33) – (3.36) в матрицу A (3.32). После необходимых упрощений получаем, что правые части линеаризованной системы (3.31) будут зависеть от параметров α, m_1, m_3 и от декартовых координат x_i^*, y_i^* какой – либо из выбранных нами стационарных точек S_i и N_i .

Далее, после выполнения соответствующих алгебраических операций, необходимо написать характеристическое уравнение системы (3.31)

$$\det(A - \lambda E) = 0, \quad (3.37)$$

которое в явной форме является алгебраическим уравнением 6-й степени относительно искомого вектора собственных значений матрицы A , величины λ . Оно будет иметь следующую аналитическую форму:

$$(\lambda^2 - d_4)(\lambda^4 + (4\omega_4^2 - a_4 - c_4)\lambda^2 + a_4c_4 - b_4^2) = 0, \quad (3.38)$$

Попутно отметим, что Д. Козак независимо удалось получить более общий результат, а именно [46]: *Она показала, что характеристическое уравнение для общей ограниченной ньютоновой проблемы $(n+2)$ -х тел имеет аналитическую форму, аналогичную уравнению (3.38), то есть вектор собственных значений матрицы A «в общем случае» определяется из следующего характеристического уравнения:*

$$(\lambda^2 - d_n)(\lambda^4 + (4\omega_n^2 - a_n - c_n)\lambda^2 + a_n c_n - b_n^2) = 0, \quad (3.39)$$

где величины a_n, b_n, c_n, d_n , очевидно считаются предварительно вычисленными.

Аналитическое выражение (3.36) показывает, что величина d_4 , независимо от численных неотрицательных значений масс m_1, m_2, m_3, m_4 , всегда отрицательна, и, следовательно, по меньшей мере, два собственных значения матрицы A , то есть корни уравнения

$$\lambda^2 - d_4 = 0 \quad (3.40)$$

всегда являются чисто мнимыми числами.

Следовательно, необходимое условие устойчивости равновесного решения $x = 0$ гарантируется существованием непустого множества значений масс, m_1, m_2, m_3, m_4 , для которых биквадратное уравнение

$$\lambda^4 + (4\omega_4^2 - a_4 - c_4)\lambda^2 + a_4 c_4 - b_4^2 = 0 \quad (3.41)$$

имеет четыре чисто мнимых корня (очевидно, в противном случае стационарная точка $x = 0$ будет неустойчивой не только в первом приближении, но и в смысле Ляпунова).

Из сделанного анализа однозначно вытекает и дальнейшая стратегия исследования: имея аналитические выражения для величин a_4, b_4, c_4 и ω_4 , зависящих от параметров модели, следует показать, прежде всего, что существуют такие значения ее параметров, при которых все собственные значения матрицы A , то есть все λ являются чисто мнимыми величинами.

Далее, используя инструкцию „Eigenvalues” Системы „Mathematica” для вычисления собственных значений матрицы A , в случае особых точек N_1, S_1 , были найдены собственные значения матрицы A в окрестности каждого из положений равновесия, варьируя численные значения параметров m_1 и α .

В результате были получены 12 таблиц для каждой из стационарных точек $N_1, \dots, N_8, S_1, \dots, S_4$. Например, в таблице 3.1 приведены собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ для стационарных точек N_1, S_1 .

Таблица 3.1. Собственные значения матрицы A

m_1	α	N_1		S_1	
		λ_1, λ_2	λ_3, λ_4	λ_1, λ_2	λ_3, λ_4
0.0001	0.99985	$\square 2.43299$	$\square 2.02593 i$	$\square 0.99946 i$	$\square 0.0321687 i$
	1.0	$\square 2.43296$	$\square 2.02591 i$	$\square 0.998603 i$	$\square 0.0509454 i$
	1.003	$\square 2.4269$	$\square 2.02093 i$	$\square 0.843908 i$	$\square 0.520699 i$
	1.004	$\square 2.42491$	$\square 2.01929 i$	$\square 0.0868197+0.704661 i$	$\square 0.0868197+0.704661 i$
0.001	0.999848	$\square 2.35155$	$\square 1.97710 i$	$\square 0.994867 i$	$\square 0.0992999 i$
	0.99985	$\square 2.35154$	$\square 1.97709 i$	$\square 0.994537 i$	$\square 0.102242 i$
	0.9999	$\square 2.35146$	$\square 1.97703 i$	$\square 0.990894 i$	$\square 0.130508 i$
	1.0031	$\square 2.34591$	$\square 1.97251 i$	$\square 0.744772 i$	$\square 0.651662 i$
	1.0032	$\square 2.34574$	$\square 1.97237 i$	$\square 0.348406+0.700435 i$	$\square 0.348406-0.700435 i$
0.003	0.99955	$\square 2.28896$	$\square 1.94014 i$	$\square 0.983174 i$	$\square 0.179007 i$
	0.9999	$\square 2.28842$	$\square 1.93971 i$	$\square 0.959278 i$	$\square 0.273309 i$
	1.0022	$\square 2.28494$	$\square 1.9369 i$	$\square 0.736147 i$	$\square 0.661479 i$
	1.0023	$\square 2.28479$	$\square 1.93678 i$	$\square 0.046889+0.701162 i$	$\square 0.046889-0.701162 i$
0.009	0.9987	$\square 2.20631$	$\square 1.89247 i$	$\square 0.937553 i$	$\square 0.340648 i$
	0.999	$\square 2.20593$	$\square 1.89218 i$	$\square 0.906597 i$	$\square 0.411469 i$
	1.0001	$\square 2.20458$	$\square 1.89111 i$	$\square 0.73989 i$	$\square 0.658941 i$
	1.0002	$\square 2.20446$	$\square 1.89101 i$	$\square 0.0514545+0.7022 i$	$\square 0.0514545-0.7022 i$
0.01	0.9985	$\square 2.19734$	$\square 1.88743 i$	$\square 0.937409 i$	$\square 0.341927 i$
	0.9998	$\square 2.19578$	$\square 1.88619 i$	$\square 0.738788 i$	$\square 0.660504 i$
	0.9999	$\square 2.19566$	$\square 1.8861 i$	$\square 0.053741+0.702514 i$	$\square 0.053741-0.702514 i$
0.03	0.99546	$\square 2.09331$	$\square 1.83107 i$	$\square 0.144544+0.718039 i$	$\square 0.144544-0.718039 i$
	0.9955	$\square 2.09328$	$\square 1.83104 i$	$\square 0.169254+0.72278 i$	$\square 0.169254-0.72278 i$

m_1	α	N_1		S_1	
		λ_1, λ_2	λ_3, λ_4	λ_1, λ_2	λ_3, λ_4
0.090.	0.9866	$\square 1.98251$	$\square 1.78114 i$	$\square 0.481144+0.845077 i$	$\square 0.481144-0.845077 i$
	0.987	$\square 1.98234$	$\square 1.78102 i$	$\square 0.505018+0.856086 i$	$\square 0.505018-0.856086 i$
0.1	0.986	$\square 1.97239$	$\square 1.77769 i$	$\square 0.546651+0.877946 i$	$\square 0.546651-0.877946 i$
	0.99	$\square 1.97088$	$\square 1.77667 i$	$\square 0.628827+0.919295 i$	$\square 0.628827-0.919295 i$
0.3	0.958	$\square 1.90835$	$\square 1.7898 i$	$\square 0.817438+1.05123 i$	$\square 0.817438-1.05123 i$
	0.96	$\square 1.90809$	$\square 1.78966 i$	$\square 0.840658+1.06212 i$	$\square 0.840658-1.06212 i$
0.9	0.8874	$\square 2.02623$	$\square 2.00395 i$	$\square 1.1724+1.32352 i$	$\square 1.1724-1.32352 i$
	0.89	$\square 2.02549$	$\square 2.00323 i$	$\square 1.18209+1.32434 i$	$\square 1.18209-1.32434 i$

Остальные два собственных значения, как было сказано выше, всегда являются чисто мнимыми числами, поэтому мы их в таблицу не включили. Из приведенной таблицы видно, что имеются неустойчивые в первом приближении положения равновесия (точки типа N_1 , так называемые *радиальные положения равновесия*) [46], но имеются и такие положения равновесия (так называемые «*биссекториальные положения равновесия*» [46]), которые в первом приближении являются устойчивыми.

Поскольку наша основная цель состоит в исследовании *ляпуновской устойчивости положений равновесия новых моделей теоретической космической динамики, каковыми являются ограниченные ньютоновы проблемы $n > 3$* , мы дальше проанализируем все условия, при выполнении которых для решения поставленной задачи применима известная теорема Арнольда-Мозера [138,139] о *ляпуновской устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем с двумя степенями свободы*. Следовательно, речь идет о *стационарных решениях гамильтоновых систем 4-го порядка и о корректности применимости к конкретным системам гамильтоновых уравнений теоремы Арнольда-Мозера*.

Названная теорема требует предварительного выполнения следующих преобразований, которые:

- 1) исключили бы из квадратичной формы гамильтониана, то есть из структуры функции W_2 «угловые переменные» – переменные ψ_1 и ψ_2 , то есть функция W_2 должна зависеть только от «медленных» переменных T_1 и T_2 , $W_2 \equiv W_2(T_1, T_2)$;
- 2) «обнулили» бы форму 3-го порядка, $W_3 \equiv 0$;
- 3) форма 4-го порядка, функция W_4 должна зависеть только от «медленных» переменных, импульсов T_1, T_2 , то есть $W_4 \equiv W_4(T_1, T_2)$.

Этап 4. Построение гамильтониана ограниченной плоской задачи

Гамильтонова система уравнений плоской ограниченной «ромбоподобной» проблемы 6-ти тел имеет вид [78]:

$$\begin{cases} \frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x}, & \frac{dx}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_x}, \\ \frac{dp_y}{dt} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y}, & \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_y}, \end{cases} \quad (3.42)$$

где гамильтониан выражается равенством:

$$\begin{aligned} \tilde{H}(x, y, p_x, p_y) = & \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \omega_4(y p_x - x p_y) - (x^2 + y^2)^{-1/2} - \\ & - m_1((x - \alpha)^2 + y^2)^{-1/2} - m_2(x^2 + (y - 1)^2)^{-1/2} - \\ & - m_3((x + \alpha)^2 + y^2)^{-1/2} - m_4(x^2 + (y + 1)^2)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Далее необходимо осуществить «перенос» начала координат в каждую из точек – положений равновесия S_i с соответствующими фазовыми координатами $x^*, y^*, p_{x^*}, p_{y^*}$, если ставится задача об исследовании ляпуновской устойчивости всех биссекториальных положений равновесия. Исследуемую точку необходимо «сде-

лать» началом системы координат, согласно простейшим формулам переноса:

$$\begin{cases} X = x - x^*, \\ Y = y - y^*, \\ P_X = p_x - p_{x^*}, \\ P_Y = p_y - p_{y^*} \end{cases} \quad (3.44)$$

где X, Y, P_X, P_Y – новые гамильтоновы переменные.

В результате для гамильтониана ограниченной проблемы шести тел получаем следующее аналитическое выражение:

$$\begin{aligned} H = & \omega_4((Y + y^*)(P_X + p_{x^*}) - (X + x^*)(P_Y + p_{y^*})) + \\ & + \frac{1}{2}((P_X + p_{x^*})^2 + (P_Y + p_{y^*})^2) - ((X + x^*)^2 + (Y + y^*)^2)^{-1/2} - \\ & - m_1((X + x^* - \alpha)^2 + (Y + y^*)^2)^{-1/2} - m_2((X + x^*)^2 + \\ & + (Y + y^* - 1)^2)^{-1/2} - m_3((X + x^* + \alpha)^2 + (Y + y^*)^2)^{-1/2} - \\ & - m_4((X + x^*)^2 + (Y + y^* + 1)^2)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Дифференциальные уравнения (3.42) в новых переменных, естественно, имеют каноническую форму

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial P_X}, & \frac{dP_X}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial X}, \\ \frac{dY}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial P_Y}, & \frac{dP_Y}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial Y}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

и они, очевидно, имеют «нулевое» частное решение

$$X = Y = P_X = P_Y = 0. \quad (3.47)$$

Этап 5. Линеаризация гамильтоновой системы

Линеаризация гамильтоновой системы (3.46) в окрестности точки (3.47), выполненная средствами ССВ *Mathematica*, порождает следующую линейную гамильтонову систему:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{X}}{dt} = a_{1010}\tilde{X} + a_{0110}\tilde{Y} + a_{0020}\tilde{P}_X + a_{0011}\tilde{P}_Y, \\ \frac{d\tilde{Y}}{dt} = a_{1001}\tilde{X} + a_{0101}\tilde{Y} + a_{0011}\tilde{P}_X + a_{0002}\tilde{P}_Y, \\ \frac{d\tilde{P}_X}{dt} = -a_{2000}\tilde{X} - a_{1100}\tilde{Y} - a_{1010}\tilde{P}_X - a_{1001}\tilde{P}_Y, \\ \frac{d\tilde{P}_Y}{dt} = -a_{1100}\tilde{X} - a_{0200}\tilde{Y} - a_{0110}\tilde{P}_X - a_{0101}\tilde{P}_Y, \end{cases} \quad (3.48)$$

где $(\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{P}_X, \tilde{P}_Y)$ – новые искомые функции.

Коэффициенты этой линейной системы выражаются следующими аналитическими равенствами:

$$\begin{aligned} a_{1010} &= 0, \quad a_{0110} = \omega_4, \quad a_{0020} = 1, \quad a_{0011} = 0, \\ a_{1001} &= -\omega_4, \quad a_{0101} = 0, \quad a_{0011} = 0, \quad a_{0002} = 1, \\ a_{2000} &= \frac{2x^{*2} - y^{*2}}{(x^{*2} + y^{*2})^{5/2}} + m_1 \frac{2(x^* - \alpha)^2 - y^{*2}}{((x^* - \alpha)^2 + y^{*2})^{5/2}} + m_2 \frac{2x^{*2} - (y^* - 1)^2}{(x^{*2} + (y^* - 1)^2)^{5/2}} + \\ &+ m_3 \frac{2(x^* + \alpha)^2 - y^{*2}}{((x^* + \alpha)^2 + y^{*2})^{5/2}} + m_4 \frac{2x^{*2} - (y^* + 1)^2}{(x^{*2} + (y^* + 1)^2)^{5/2}}, \\ a_{1100} &= \frac{3x^* y^*}{(x^{*2} + y^{*2})^{5/2}} + 3m_1 \frac{(x^* - \alpha)y^*}{((x^* - \alpha)^2 + y^{*2})^{5/2}} + 3m_2 \frac{x^*(y^* - 1)}{(x^{*2} + (y^* - 1)^2)^{5/2}} + \\ &+ 3m_3 \frac{(x^* + \alpha)y^*}{((x^* + \alpha)^2 + y^{*2})^{5/2}} + 3m_4 \frac{x^*(y^* + 1)}{(x^{*2} + (y^* + 1)^2)^{5/2}}, \\ a_{1010} &= 0, \quad a_{1001} = -\omega_5, \end{aligned}$$

$$a_{0200} = \frac{2y^{*2} - x^{*2}}{(x^{*2} + y^{*2})^{5/2}} + m_1 \frac{2y^{*2} - (x^* - \alpha)^2}{((x^* - \alpha)^2 + y^{*2})^{5/2}} + m_2 \frac{2(y^* - 1)^2 - x^{*2}}{(x^{*2} + (y^* - 1)^2)^{5/2}} +$$

$$+ m_3 \frac{2y^{*2} - (x^* + \alpha)^2}{((x^* + \alpha)^2 + y^{*2})^{5/2}} + m_4 \frac{2(y^* + 1)^2 - x^{*2}}{(x^{*2} + (y^* + 1)^2)^{5/2}}.$$

$$a_{0110} = \omega_4, \quad a_{0101} = 0,$$

В векторной форме удобно написать линейную систему (3.48) в виде транспонированной системы

$$\left[\frac{d\tilde{X}}{dt}, \frac{d\tilde{Y}}{dt}, \frac{d\tilde{P}_X}{dt}, \frac{d\tilde{P}_Y}{dt} \right]^T = A' [\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{P}_X, \tilde{P}_Y]^T, \quad (3.49)$$

где символ « T » означает транспонирование вектора неизвестных, а матрица A' имеет вид

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & \omega_4 & 1 & 0 \\ -\omega_4 & 0 & 0 & 1 \\ -a_{2000} & -a_{1100} & 0 & \omega_4 \\ -a_{1100} & -a_{0200} & -\omega_4 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.50)$$

Собственные значения матрицы A' очевидно совпадают с собственными значениями первоначальной матрицы A .

Ниже описан пример преобразованного гамильтониана в *окрестности конкретной устойчивой в первом приближении, точки равновесия* S_I с координатами

$$x^* = 0.237355, \quad y^* = 0.971439, \quad (3.51)$$

вычисленными при $m_1 = 0.001$, $\alpha = 0.99985$.

Собственные значения матрицы A для этой точки равновесия $\lambda_1 = 0.994537i$, $\lambda_2 = -0.994537i$, $\lambda_3 = 0.102242i$, $\lambda_4 = -0.102242i$.

Используя аналитичность гамильтониана H в окрестности точки $(0,0,0,0)$, можно, при помощи Системы „Mathematica”, построить, как того требует теорема Арнольда-Мозера, его степенное разложение, форму которого можно найти, например, в монографии А.П. Маркеева [43, 87].

Она имеет следующую аналитическую структуру:

$$H = H_2(X, Y, P_X, P_Y) + H_3(X, Y) + H_4(X, Y) + H_5(X, Y) + \dots, \quad (3.52)$$

где $H_k (k = 3, 4, \dots)$ – однородная форма k -ой степени относительно фазовых координат X и Y . В частности, имеем:

$$H_2 = 0.414231X^2 - 0.915163Y^2 + 0.5(P_X^2 + P_Y^2) - 0.690873XY + \omega_4(YP_X - XP_Y), \quad (3.53)$$

$$H_3 = -0.317928X^3 + 0.83534Y^3 - 1.04916X^2Y + 1.316579XY^2, \quad (3.54)$$

$$H_4 = -0.195709X^4 - 0.738349Y^4 + 1.524255X^3Y + 1.654642X^2Y^2 - 2.094505XY^3. \quad (3.55)$$

Этап 6. Нормализация квадратичной формы гамильтониана H_2 .

Выражение (3.53) указывает на то, что квадратичная форма $H_2(X, Y, P_X, P_Y)$ содержит слагаемое $\omega_4(YP_X - XP_Y)$, которое не является «положительно квадратичной формой» и оно, к тому же, «не присутствует» в приведенной раньше формулировке теоремы Арнольда-Мозера.

Следовательно, следующая задача состоит в построении такого линейного невырожденного канонического преобразования, в результате которого в преобразованной квадратичной части гамильтониана не присутствовали бы произведения импульсов и

координат вида $(q_1 p_1, q_1 p_2, q_1 q_2, q_2 p_1, q_2 p_2, p_1 p_2)$ и, кроме того, она имела бы нормальную форму Биркгофа, которую мы напишем ниже.

Будем искать такое линейное преобразование $(X, Y, P_X, P_Y) \rightarrow (q_1, q_2, p_1, p_2)$ в виде

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ P_X \\ P_Y \end{bmatrix} = B_4 \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}, \quad (3.56)$$

Здесь B_4 – матрица написанного преобразования порядка 4×4 , которую необходимо определить.

Если преобразование (3.56) было бы реализовано, тогда мы бы имели следующее тождество гамильтонианов:

$$H(X, Y, P_X, P_Y) \equiv K(q_1, q_2, p_1, p_2), \quad (3.57)$$

где новый гамильтониан K должен иметь следующую аналитическую форму

$$\begin{aligned} K(q_1, q_2, p_1, p_2) = \\ = K_2(q_1, q_2, p_1, p_2) + K_3(q_1, q_2, p_1, p_2) + K_4(q_1, q_2, p_1, p_2) + \dots, \end{aligned} \quad (3.58)$$

причем его квадратичная форма K_2 должна иметь нормальную форму по Биркгофу [43,46], то есть

$$K_2 = \frac{1}{2} \sigma_1 (q_1^2 + p_1^2) - \frac{1}{2} \sigma_2 (q_2^2 + p_2^2), \quad (3.59)$$

где частоты — величины $\sigma_1 = |\lambda_1| = |\lambda_2|$, $\sigma_2 = |\lambda_3| = |\lambda_4|$.

Для исследуемой точки S_1 имеем: $\sigma_1 = 0.994537, \sigma_2 = 0.102242$.

Определение элементов матрицы B_4 , позволяющей написать каноническую форму (3.59) сводится к нахождению 16-мерного вектора-столбца $z^\dagger$ из следующей алгебраической линейной системы уравнений

$$C_{16}z = 0. \quad (3.60)$$

Квадратная матрица C_{16} имеет порядок 16×16 и ее элементы известны [46]:

$$C_{16} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_1 & 0 & \omega_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma_2 & 0 & \omega_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_4 & 0 & -\sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_4 & 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\alpha & 0 & 0 & 0 & -\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1 & 0 & \omega_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & -\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_2 & 0 & \omega_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & -\gamma & 0 & -\sigma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma & 0 & \sigma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_4 \\ -\gamma & 0 & 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & -\omega_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_1 \\ 0 & -\gamma & 0 & 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & -\omega_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_2 \\ 0 & 0 & -\gamma & 0 & 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & -\omega_4 & 0 & -\sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma & 0 & 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & -\omega_4 & 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.61).$$

Кроме того, для удобства вычислений, введем в этой матрице следующие обозначения для известных величин α, β, γ : $\alpha = a_{2000}$, $\beta = a_{0200}$, $\gamma = a_{1100}$.

Нас естественно интересует любое ненулевое решение линейной алгебраической системы (3.60), поэтому, в первую очередь, необходимо вычислить ее определитель. Он оказался равным

$$\det C_{16} = (\det(A' - \lambda_1 E))^2 \cdot (\det(A' - \lambda_3 E))^2. \quad (3.62)$$

[†] транспонированный вектор-строка, $z^T = (b_{11}, b_{12}, \dots, b_{44})$.

Так как λ_1, λ_3 являются собственными значениями матрицы A' , очевидно, ее определитель равен нулю:

$$\det C_{16} = 0. \quad (3.63)$$

Из этого следует, что однородная алгебраическая система (3.60) *может иметь ненулевое решение* и, следовательно, *невырожденное линейное преобразование* (3.56) *может существовать*. Поэтому далее всюду мы должны действовать в соответствии с «законами линейной алгебры» [61].

Сначала мы вычисляем в аналитической форме, используя систему *Mathematica*, 256 миноров 15-го порядка матрицы C_{16} .

Часть миноров 15-го порядка сразу получаются равными нулю, а все остальные миноры представимы в виде,

$$M_{15} = (\det(A' - \lambda_1 E))^2 \cdot (\det(A' - \lambda_3 E)) \cdot F_{15}(\alpha, \beta, \gamma, \sigma_1, \sigma_2, \omega_5),$$

или

$$M_{15} = (\det(A' - \lambda_1 E)) \cdot (\det(A' - \lambda_3 E))^2 \cdot F'_{15}(\alpha, \beta, \gamma, \sigma_1, \sigma_2, \omega_5), \quad (3.64)$$

где F_{15} и F'_{15} – некоторые алгебраические выражения, зависящие от указанных параметров.

Очевидно, эти миноры тоже равны нулю, поэтому, далее, были вычислены все 57600 миноров 14-го порядка. Ситуация повторилась. Неравные нулю миноры 14-го порядка имеют вид

$$M_{14} = (\det(A' - \lambda_1 E)) \cdot (\det(A' - \lambda_3 E)) \cdot F_{14}(\alpha, \beta, \gamma, \sigma_1, \sigma_2, \omega_5). \quad (3.65)$$

Среди 11289600 миноров 13-го порядка, многие из которых сразу получились равными нулю, а остальные, оставшиеся после первичного анализа, имеют аналитическую форму

$$M_{13} = \det(A' - \lambda_1 E) \cdot F_{13}(\alpha, \beta, \gamma, \sigma_1, \sigma_2, \omega_4),$$

или

$$M_{13} = \det(A' - \lambda_3 E) \cdot F'_{13}(\alpha, \beta, \gamma, \sigma_1, \sigma_2, \omega_4). \quad (3.66)$$

Вывод. Выражения (3.61) – (3.66) показывают, что *опредетель матрицы C_{16} и все миноры 13-го, 14-го и 15-го порядков равны нулю.*

Вычисления *миноров 12-го порядка показывает, что среди них имеются миноры, не равные нулю*, откуда следует, что алгебраическая система уравнений (3.60) имеет ненулевые решения. Эти решения образуют *четырёх параметрическое семейство решений.*

Согласно теоремам алгебры [61.62], четыре элемента матрицы B_4 должны быть выбраны таким образом, чтобы квадратичная форма преобразованного гамильтониана была нормализована по Биркгофу и имела бы в точности аналитическую форму (3.59).

Это означает, что среди бесконечного множества матриц B_4 *необходимо выбрать именно симплектическую матрицу*, т.е. такое решение $z^T = (b_{11}, b_{12}, \dots, b_{44})$ линейной алгебраической системы (3.60), которое удовлетворяло бы *определению симплектичности* [41,46].

Напомним, что матрица A_{2n} порядка $2n \times 2n$ называется *симплектической*, если она удовлетворяет матричному равенству [46]

$$A_{2n}^T I_{2n} A_{2n} = I_{2n}, \quad (3.67)$$

здесь A_{2n}^T – транспонированная матрица для матрицы A_{2n} . Матрица I_{2n} равна

$$I_{2n} = \begin{pmatrix} O_n & -E_n \\ E_n & O_n \end{pmatrix}, \quad (3.68)$$

где O_n – нулевая матрица порядка $n \times n$, E_n – единичная матрица порядка $n \times n$.

Из этого определения вытекает следующее утверждение:

Важное утверждение. Для того, чтобы матрица B_4 была бы симплектической матрицей необходимо и достаточно, чтобы имело место следующее матричное равенство

$$B_4^T I_4 B_4 = I_4, \quad (3.69)$$

где B_4^T – транспонированная матрица B_4 .

Матричное уравнение (3.69) эквивалентно следующей системе шести нелинейных алгебраических уравнений, неизвестными в которой также являются элементы матрицы B_4 , то есть величины b_{ik} , $i, k=1, 2, 3, 4$:

$$\begin{cases} b_{11}b_{32} - b_{12}b_{31} + b_{21}b_{42} - b_{22}b_{41} = 0, \\ b_{11}b_{33} - b_{13}b_{31} + b_{21}b_{43} - b_{23}b_{41} = 1, \\ b_{11}b_{34} - b_{14}b_{31} + b_{21}b_{44} - b_{24}b_{41} = 0, \\ b_{12}b_{33} - b_{13}b_{32} + b_{22}b_{43} - b_{23}b_{42} = 0, \\ b_{12}b_{34} - b_{14}b_{32} + b_{22}b_{44} - b_{24}b_{42} = 1, \\ b_{13}b_{34} - b_{14}b_{33} + b_{23}b_{44} - b_{24}b_{43} = 0. \end{cases} \quad (3.70)$$

Вывод. Для приведения квадратичной части гамильтониана H_2 к нормальной форме в смысле Биркгофа, следует определить 16 неизвестных, $b_{11}, b_{12}, \dots, b_{44}$ в результате совместного решения линейной однородной системы (3.60), состоящей из 16 уравнений и нелинейной алгебраической системы (3.70), состоящей из 6 уравнений.

Выполненный нами вычислительный эксперимент показал, что в системе Mathematica решение этой задачи реализуется весьма быстро, если добавить несколько вспомогательных усло-

вий. Следует также добавить, что интересный алгоритм решения этой ключевой задачи в процедуре нормализации гамильтонианов был предложен профессором А.П. Маркеевым [87].

Например, для точки S_1 с координатами (3.51), найденная матрица B_4 представляется таблицей

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1.98114 & 5.328999 \\ -1.03191 & 0.38363 & -0.35829 & -1.29568 \\ -0.93804 & 0.16108 & 0.35842 & 1.29614 \\ 0.356334 & -0.13247 & 0.95557 & 5.29166 \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$

После преобразования функций (3.53)-(3.55) с помощью замены переменных (3.56) квадратичная форма K_2 , кубическая форма K_3 и форма четвертого порядка K_4 выражаются каноническими формулами [43,46]:

$$\begin{aligned} K_2 &= \frac{1}{2}\sigma_1(p_1^2 + q_1^2) - \frac{1}{2}\sigma_2(p_2^2 + q_2^2) = \\ &= 0.49727(p_1^2 + q_1^2) - 0.05112(p_2^2 + q_2^2), \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} K_3 &= -0.700344p_1^3 - 3.771015p_1^2p_2 - 4.896871p_1p_2^2 + \\ &+ 0.452007p_2^3 + 5.846024p_1^2q_1 + 32.621649p_1p_2q_1 + \\ &+ 45.164737p_2^2q_1 + 1.821347p_1q_1^2 + 4.013408p_2q_1^2 - \\ &- 0.917884q_1^3 - 2.173359p_1^2q_2 - 12.127657p_1p_2q_2 - \\ &- 16.790077p_2^2q_2 - 1.354234p_1q_1q_2 - 2.984107p_2q_1q_2 + \\ &+ 1.023717q_1^2q_2 + 0.251729p_1q_2^2 + 0.554696p_2q_2^2 - \\ &- 0.380585q_1q_2^2 + 0.047163q_2^3, \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$\begin{aligned}
K_4 = & -6.249106p_1^4 - 69.140864p_1^3p_2 - 285.506731p_1^2p_2^2 - \\
& - 521.541002p_1p_2^3 - 355.623129p_2^4 - 5.919479p_1^3q_1 - \\
& - 40.652926p_1^2p_2q_1 - 89.158571p_1p_2^2q_1 - 61.002839p_1^3q_1 + \\
& + 11.059209p_1^2q_1^2 + 62.773252p_1p_2q_1^2 + 88.314296p_2^2q_1^2 + \\
& + 3.396809p_1q_1^3 + 8.059740p_2q_1^3 - 0.837196q_1^4 + 2.200668p_1^3q_2 + \\
& + 15.113422p_1^2p_2q_2 + 33.146227p_1p_2^2q_2 + 22.678852p_2^3q_2 - \quad (3.74) \\
& - 8.222901p_1^2q_1q_2 - 46.674065p_1p_2q_1q_2 - 65.664708p_2^2q_1q_2 - \\
& - 3.788466p_1q_1^2q_2 - 8.98904p_2q_1^2q_2 + 1.244968q_1^3q_2 + \\
& + 1.528502p_1^2q_2^2 + 8.675942p_1p_2q_2^2 + 12.205991p_2^2q_2^2 + \\
& + 1.408427p_1q_1q_2^2 + 3.341829p_2q_1q_2^2 - 0.694257q_1^2q_2^2 - \\
& - 0.174536p_1q_2^3 - 0.414127p_2q_2^3 + 0.172068q_1q_2^3 - 0.015992q_2^4
\end{aligned}$$

Таким образом, реализован первый шаг, необходимый для исследования ляпуновской устойчивости точки S_1 , состоящий в том, что удалось привести квадратичную форму гамильтониана K_2 к виду, описанному аналитическим равенством (3.59).

Этап 7. Нормализация (ликвидация) кубической формы гамильтониана, функции H_3 .

Канонические переменные общего вида (q_1, q_2, p_1, p_2) не являются переменными типа „действие – угол” [58–59], так как квадратичная форма гамильтониана K_2 зависит не только от импульсов p_1, p_2 , но зависит также от «угловых», фазовых координат q_1, q_2 .

Поэтому необходимо перейти от канонических переменных (q_1, q_2, p_1, p_2) к новым каноническим переменным $(\theta_1, \theta_2, \tau_1, \tau_2)$ по формулам Биркгофа [59] :

$$\begin{cases} q_1 = \sqrt{2\tau_1} \sin \theta_1, \\ q_2 = \sqrt{2\tau_2} \sin \theta_2, \\ p_1 = \sqrt{2\tau_1} \cos \theta_1, \\ p_2 = \sqrt{2\tau_2} \cos \theta_2, \end{cases} \quad (3.75)$$

Они позволяют *исключить из квадратичной формы гамильтониана новые фазовые переменные – угловые координаты θ_1, θ_2 и сохраняют в ней только новые «импульсы» τ_1, τ_2 .*

Таким образом, формулы (3.75) преобразовывают имеющийся гамильтониан $K(q_1, q_2, p_1, p_2)$ в «новый» гамильтониан $F(\theta_1, \theta_2, \tau_1, \tau_2)$ такой, что

$$K(q_1, q_2, p_1, p_2) \equiv F(\theta_1, \theta_2, \tau_1, \tau_2), \quad (3.76)$$

где

$$F(\theta_1, \theta_2, \tau_1, \tau_2) = F_2(\tau_1, \tau_2) + F_3(\theta_1, \theta_2, \tau_1, \tau_2) + F_4(\theta_1, \theta_2, \tau_1, \tau_2) + \dots \quad (3.77)$$

В равенстве (3.77) подчеркнуто, что форма F_2 *не зависит от θ_1, θ_2 , а зависит лишь от новых импульсов τ_1, τ_2 .*

После необходимых вычислений, для форм F_2, F_3, F_4 получаем аналитические выражения [43,46]:

$$F_2 = \sigma_1 \tau_1 - \sigma_2 \tau_2 = 0.994537 \tau_1 - 0.102242 \tau_2, \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} F_3 = & (0.197768 \cos \theta_1 - 1.7831 \cos 3\theta_1 + 2.18664 \sin \theta_1 + \\ & + 4.78281 \sin 3\theta_1) \tau_1^{3/2} + (6.46201 \cos(2\theta_1 - \theta_2) + 0.342795 \cos \theta_2 - \\ & - 4.54683 \cos(2\theta_1 + \theta_2) + 25.3277 \sin(2\theta_1 - \theta_2) - 1.62584 \sin \theta_2 + \\ & + 20.806 \sin(2\theta_1 + \theta_2)) \tau_1 \sqrt{\tau_2} - (6.5692 \cos \theta_1 + 5.7507 \cos(\theta_1 - 2\theta_2) + \\ & + 1.53053 \cos(\theta_1 + 2\theta_2) - 63.3344 \sin \theta_1 - 40.781 \sin(\theta_1 - 2\theta_2) - \\ & - 23.6299 \sin(\theta_1 + 2\theta_2)) \sqrt{\tau_1} \tau_2 + (1.35108 \cos \theta_2 - 0.072612 \cos 3\theta_2 - \\ & - 11.7728 \sin \theta_2 - 11.9062 \sin 3\theta_2) \tau_2^{3/2}, \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned}
F_4 = & (-5.09985 - 10.8238\cos 2\theta_1 - 9.07276\cos 4\theta_1 - \\
& - 2.52267\sin 2\theta_1 - 4.65814\sin 4\theta_1)\tau_1^2 - (74.5687\cos(\theta_1 - \theta_2) + \\
& + 70.691\cos(3\theta_1 - \theta_2) + 70.081\cos(\theta_1 + \theta_2) + 61.223\cos(3\theta_1 + \theta_2) + \\
& + 9.64362\sin(\theta_1 - \theta_2) + 27.3509\sin(3\theta_1 - \theta_2) + 6.8308\sin(\theta_1 + \theta_2) + \\
& + 21.362\sin(3\theta_1 + \theta_2))\tau_1^{3/2}\sqrt{\tau_2} - (196.358 + 371.598\cos 2\theta_1 + \\
& + 211.36\cos(2\theta_1 - 2\theta_2) + 198.027\cos 2\theta_2 + 164.69\cos(2\theta_1 + 2\theta_2) + \quad (3.80) \\
& + 87.7501\sin 2\theta_1 + 57.3347\sin(2\theta_1 - 2\theta_2) - 6.1244\sin 2\theta_2 + \\
& + 33.2323\sin(2\theta_1 + 2\theta_2))\tau_1\tau_2 - (298.027\cos(\theta_1 - 3\theta_2) + \\
& + 810.55\cos(\theta_1 - \theta_2) + 745.399\cos(\theta_1 + \theta_2) + 232.19\cos(\theta_1 + 3\theta_2) + \\
& + 48.8327\sin(\theta_1 - 3\theta_2) + 106.145\sin(\theta_1 - \theta_2) + 73.522\sin(\theta_1 + \theta_2) + \\
& + 15.512\sin(\theta_1 + 3\theta_2))\sqrt{\tau_1}\tau_2^{3/2} - (527.356 + 711.214\cos 2\theta_2 + \\
& + 183.923\cos 4\theta_2 - 22.2647\sin 2\theta_2 - 11.5465\sin 4\theta_2)\tau_2^2.
\end{aligned}$$

Новые переменные $(\theta_1, \theta_2, \tau_1, \tau_2)$ также являются каноническими переменными типа „действие-угол”, поэтому гамильтоновы уравнения в этих переменных очевидно представляются каноническими равенствами

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\tau_1}{dt} &= -\frac{\partial F_3}{\partial \theta_1} - \frac{\partial F_4}{\partial \theta_1} + \dots, \\ \frac{d\tau_2}{dt} &= -\frac{\partial F_3}{\partial \theta_2} - \frac{\partial F_4}{\partial \theta_2} + \dots, \end{aligned} \right\} \left\{ \begin{aligned} \frac{d\theta_1}{dt} &= \frac{\partial F_2}{\partial \tau_1} + \frac{\partial F_3}{\partial \tau_1} + \frac{\partial F_4}{\partial \tau_1} + \dots, \\ \frac{d\theta_2}{dt} &= \frac{\partial F_2}{\partial \tau_2} + \frac{\partial F_3}{\partial \tau_2} + \frac{\partial F_4}{\partial \tau_2} + \dots. \end{aligned} \right. \quad (3.81)$$

Важным для дальнейшего является *отсутствие в первых двух уравнениях (3.81) частных производных квадратичной формы F_2* .

Этап 8. «Обнуление» кубической формы H_3 и нормализация формы H_4 .

Аналитическая структура гамильтониана в теореме Арнольда-Мозера диктует необходимость построения еще одного канонического преобразования [43,46]

$$(\theta_1, \theta_2, \tau_1, \tau_2) \rightarrow (\psi_1, \psi_2, T_1, T_2), \quad (3.82)$$

которое “обнуляет” в новом гамильтониане форму 3-го порядка и исключает из формы 4-го порядка новые «фазовые углы», величины ψ_1, ψ_2 . Другими словами, последнее преобразование должно привести наш гамильтониан к виду

$$F(\theta_1, \theta_2, \tau_1, \tau_2) \equiv W(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2), \quad (3.83)$$

где

$$W(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2) = W_2(T_1, T_2) + W_4(T_1, T_2) + W_5(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2) + \dots \quad (3.84)$$

Аналитическое выражение (3.84) указывает на то, что фазовые углы ψ_1 и ψ_2 могут сохраниться только в функциях более высокого порядка, т.е. в формах разложения гамильтониана 5-го, 6-го и т.д. порядка (в выражениях W_5, W_6 , и т.д.), *которые «не участвуют» в формулировке теоремы Арнольда-Мозера.*

Последнее каноническое преобразование, с необходимой точностью до членов 4-го порядка включительно, напомним в виде

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \psi_1 + V_{13}(T_1, T_2, \psi_1, \psi_2) + V_{14}(T_1, T_2, \psi_1, \psi_2), \\ \theta_2 &= \psi_2 + V_{23}(T_1, T_2, \psi_1, \psi_2) + V_{24}(T_1, T_2, \psi_1, \psi_2), \\ \tau_1 &= T_1 + U_{13}(T_1, T_2, \psi_1, \psi_2) + U_{14}(T_1, T_2, \psi_1, \psi_2), \\ \tau_2 &= T_2 + U_{23}(T_1, T_2, \psi_1, \psi_2) + U_{24}(T_1, T_2, \psi_1, \psi_2), \end{aligned} \quad (3.85)$$

где неизвестные функции многих переменных, $U_{13}, U_{23}, U_{14}, U_{24}, V_{13}, V_{23}, V_{14}, V_{24}$ определяются из некоторых линейных дифференциальных уравнений в частных производных [46]. Строго говоря, преобразование (3.85) должно быть написано в виде бесконечных рядов, но для наших целей достаточно ограничиться только написанными функциями.

Поиск и нахождение решений уравнений в частных производных для неизвестных функций $U_{13}, U_{23}, U_{14}, U_{24}, V_{13}, V_{23}, V_{14}, V_{24}$ представляет собой громоздкую аналитическую работу, поэтому оно также было выполнено с использованием возможностей компьютерной алгебры. Эти уравнения имеют вид [46]:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_{13}}{\partial \psi_1} \sigma_1 - \frac{\partial U_{13}}{\partial \psi_2} \sigma_2 = A_{13}(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2), \\ \frac{\partial U_{23}}{\partial \psi_1} \sigma_1 - \frac{\partial U_{23}}{\partial \psi_2} \sigma_2 = A_{23}(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2), \\ \frac{\partial V_{13}}{\partial \psi_1} \sigma_1 - \frac{\partial V_{13}}{\partial \psi_2} \sigma_2 = B_{13}(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2), \\ \frac{\partial V_{23}}{\partial \psi_1} \sigma_1 - \frac{\partial V_{23}}{\partial \psi_2} \sigma_2 = B_{23}(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2), \end{cases} \quad (3.86)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial U_{14}}{\partial \psi_1} \sigma_1 - \frac{\partial U_{14}}{\partial \psi_2} \sigma_2 = A_{14}(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2), \\ \frac{\partial U_{24}}{\partial \psi_1} \sigma_1 - \frac{\partial U_{24}}{\partial \psi_2} \sigma_2 = A_{24}(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2), \\ \frac{\partial V_{14}}{\partial \psi_1} \sigma_1 - \frac{\partial V_{14}}{\partial \psi_2} \sigma_2 = B_{14}(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2), \\ \frac{\partial V_{24}}{\partial \psi_1} \sigma_1 - \frac{\partial V_{24}}{\partial \psi_2} \sigma_2 = B_{24}(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2). \end{cases} \quad (3.87)$$

Правые части систем (3.86) и (3.87) выражаются через частные производные форм $F_3(\theta_1, \theta_2, \tau_1, \tau_2)$ и $F_4(\theta_1, \theta_2, \tau_1, \tau_2)$, в которых выполнена замена (3.82). Сначала более подробно опишем систему

(3.86), так как она позволяет „обнулить” кубическую форму преобразованного гамильтониана. Ее правые части имеют вид [46,77]:

$$\begin{aligned}
 A_{13} = -\frac{\partial F_3}{\partial \theta_1} \Big|_{(\theta_1, \theta_2, \tau_1, \tau_2) \rightarrow (\psi_1, \psi_2, T_1, T_2)} &= (-2.18664 \cos \psi_1 - \\
 &-14.3484 \cos 3\psi_1 - 0.19777 \sin \psi_1 - 5.3493 \sin 3\psi_1) T_1^{3/2} - \\
 &-(50.655 \cos(2\psi_1 - \psi_2) + 41.612 \cos(2\psi_1 + \psi_2) + \\
 &+12.92 \sin(2\psi_1 - \psi_2) + 9.09366 \sin(2\psi_1 + \psi_2)) T_1 \sqrt{T_2} - \\
 &-(63.334 \cos \psi_1 + 40.781 \cos(\psi_1 - 2\psi_2) + 23.629 \cos(\psi_1 + 2\psi_2) + \\
 &+6.56922 \sin \psi_1 + 5.75069 \sin(\psi_1 - 2\psi_2) + \\
 &+1.53053 \sin(\psi_1 + 2\psi_2)) \sqrt{T_1} T_2, \quad (3.88)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_{23} = -\frac{\partial F_3}{\partial \theta_2} \Big|_{(\theta_1, \theta_2, \tau_1, \tau_2) \rightarrow (\psi_1, \psi_2, T_1, T_2)} &= (25.3277 \cos(2\psi_1 - \psi_2) + \\
 &+1.6258 \cos \psi_2 - 20.806 \cos(2\psi_1 + \psi_2) + 6.462 \sin(2\psi_1 - \psi_2) + \\
 &+0.343 \sin \psi_2 - 4.55 \sin(2\psi_1 + \psi_2)) T_1 \sqrt{T_2} + (81.56 \cos(\psi_1 - 2\psi_2) - \\
 &-47.2597 \cos(\psi_1 + 2\psi_2) + 11.5014 \sin(\psi_1 - 2\psi_2) - \\
 &-3.061 \sin(\psi_1 + 2\psi_2)) \sqrt{T_1} T_2 + (11.7728 \cos \psi_2 + 35.7186 \cos 3\psi_2 + \\
 &+1.35108 \sin \psi_2 - 0.2178 \sin 3\psi_2) T_2^{3/2}, \quad (3.89)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{13} = -\frac{\partial F_3}{\partial \tau_1} \Big|_{(\theta_1, \theta_2, \tau_1, \tau_2) \rightarrow (\psi_1, \psi_2, T_1, T_2)} &= (-0.297 \cos \psi_1 - 2.675 \cos 3\psi_1 + \\
 &+3.2799 \sin \psi_1 + 7.1742 \sin 3\psi_1) \sqrt{T_1} - (6.46201 \cos(2\psi_1 - \psi_2) - \\
 &-0.3428 \cos \psi_2 + 4.547 \cos(2\psi_1 + \psi_2) - 25.328 \sin(2\psi_1 - \psi_2) + \\
 &+1.6258 \sin \psi_2 - 20.8063 \sin(2\psi_1 + \psi_2)) \sqrt{T_2} - (3.2846 \cos \psi_1 + \\
 &+2.8753 \cos(\psi_1 - 2\psi_2) + 0.765 \cos(\psi_1 + 2\psi_2) - 31.667 \sin \psi_1 - \\
 &-20.391 \sin(\psi_1 - 2\psi_2) - 11.815 \sin(\psi_1 + 2\psi_2)) T_1^{-1/2} T_2, \quad (3.90)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{23} = -\frac{\partial F_3}{\partial \tau_2} \Big|_{(\theta_1, \theta_2, \tau_1, \tau_2) \rightarrow (\psi_1, \psi_2, T_1, T_2)} &= (-6.569 \cos \psi_1 - \\
&- 5.751 \cos(\psi_1 - 2\psi_2) - 1.5305 \cos(\psi_1 + 2\psi_2) + 63.3344 \sin \psi_1 + \\
&+ 40.781 \sin(\psi_1 - 2\psi_2) + 23.629 \sin(\psi_1 + 2\psi_2)) \cdot \sqrt{T_1} + \\
&+ (-3.231 \cos(2\psi_1 - \psi_2) + 0.171398 \cos \psi_2 - \\
&- 2.273 \cos(2\psi_1 + \psi_2) + 12.664 \sin(2\psi_1 - \psi_2) - 0.813 \sin \psi_2 + \\
&+ 10.4032 \sin(2\psi_1 + \psi_2)) T_1 T_2^{-1/2} + (2.02662 \cos \psi_2 - \\
&- 0.1089 \cos 3\psi_2 - 17.6592 \sin \psi_2 - 17.8593 \sin 3\psi_2) \sqrt{T_2}.
\end{aligned} \tag{3.91}$$

Система уравнений в частных производных (3.87) должна быть использована таким образом, чтобы можно было привести форму 4-го порядка преобразованного гамильтониана к виду $W_4(T_1, T_2)$ из представления (3.84), т.е., чтобы форма 4-го порядка также не содержала фазовых углов, а содержала бы только новые «импульсы» T_1 и T_2 .

Для этого нет надобности исследовать систему (3.87) в целом, а достаточно построить решение двух первых ее уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial U_{14}}{\partial \psi_1} \sigma_1 - \frac{\partial U_{14}}{\partial \psi_2} \sigma_2 = A_{14}(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2), \\ \frac{\partial U_{24}}{\partial \psi_1} \sigma_1 - \frac{\partial U_{24}}{\partial \psi_2} \sigma_2 = A_{24}(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2), \end{cases} \tag{3.92}$$

так как неизвестные функции V_{14} , V_{24} участвуют в аналитических структурах членов, порядок которых выше четвертого.

Правые части уравнений (3.92) содержат все выражения из прежней кубической формы F_3 , которые после последнего преобразования дают четвертый порядок, и часть формы F_4 , которая после выполнения преобразования (3.82), также «порождает» слагаемые четвертого порядка. Эти «части» обозначим символами F_3^* , F_4^* . Тогда получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
A_{14} = & -\frac{\partial F_3^*}{\partial \psi_1} - \frac{\partial F_4^*}{\partial \psi_1} = (48.7551 \cos 2\psi_1 + 364.518 \cos 4\psi_1 + \\
& + 154.352 \cos 6\psi_1 + 17.8398 \cos(2\psi_1 - 2\psi_2) + 313.042 \cos(4\psi_1 - 2\psi_2) - \\
& - 515.161 \sin 2\psi_1 - 735.703 \sin 4\psi_1 - 178.236 \sin 6\psi_1 - \\
& - 424.423 \sin(2\psi_1 - 2\psi_2) - 573.55 \sin(4\psi_1 - 2\psi_2)) T_1^2 + \\
& + (103.52 \cos(\psi_1 - 3\psi_2) + 1904.23 \cos(3\psi_1 - 3\psi_2) + \\
& + 386.624 \cos(\psi_1 - \psi_2) + 2650.28 \cos(3\psi_1 - \psi_2) + 736.818 \cos(5\psi_1 - \psi_2) - \\
& - 3.8931 \cos(\psi_1 + \psi_2) + 1468.72 \cos(3\psi_1 + \psi_2) + 615.744 \cos(5\psi_1 + \psi_2) + \\
& + 104.071 \cos(\psi_1 + 3\psi_2) + 110.73 \cos(3\psi_1 + 3\psi_2) - 1917.16 \sin(\psi_1 - 3\psi_2) - \\
& - 4633.9 \sin(3\psi_1 - 3\psi_2) - 3032.86 \sin(\psi_1 - \psi_2) - 7824.06 \sin(3\psi_1 - \psi_2) - \\
& - 1061.76 \sin(5\psi_1 - \psi_2) - 2151.34 \sin(\psi_1 + \psi_2) - 3591.04 \sin(3\psi_1 + \psi_2) - \\
& - 956.423 \sin(5\psi_1 + \psi_2) - 880.645 \sin(\psi_1 + 3\psi_2) - \\
& - 385.322 \sin(3\psi_1 + 3\psi_2)) T_1^{3/2} \sqrt{T_2} + \quad (3.93) \\
& + (4466.07 \cos 2\psi_1 + 1877.45 \cos 4\psi_1 + 3004.59 \cos(2\psi_1 - 4\psi_2) + \\
& + 5290.05 \cos(2\psi_1 - 2\psi_2) + 1127.6 \cos(4\psi_1 - 2\psi_2) + \\
& + 1921.88 \cos(2\psi_1 + 2\psi_2) + 776.688 \cos(4\psi_1 + 2\psi_2) + \\
& + 99.436 \cos(2\psi_1 + 4\psi_2) - 20261.3 \sin 2\psi_1 - 3763.42 \sin 4\psi_1 - \\
& - 10669.7 \sin(2\psi_1 - 4\psi_2) - 25354.1 \sin(2\psi_1 - 2\psi_2) - 2071.8 \sin(4\psi_1 - 2\psi_2) - \\
& - 6657.84 \sin(2\psi_1 + 2\psi_2) - 1711.48 \sin(4\psi_1 + 2\psi_2) - \\
& - 1013.17 \sin(2\psi_1 + 4\psi_2) T_1 T_2 + (869.24 \cos(\psi_1 - 5\psi_2) + 771.15 \cos(\psi_1 - 3\psi_2) \\
& + 511.89 \cos(3\psi_1 - 3\psi_2) + 3750.45 \cos(\psi_1 - \psi_2) + 1249.87 \cos(3\psi_1 - \psi_2) - \\
& - 590.394 \cos(\psi_1 + \psi_2) + 1003.99 \cos(3\psi_1 + \psi_2) + 782.489 \cos(\psi_1 + 3\psi_2) + \\
& + 264.449 \cos(3\psi_1 + 3\psi_2) + 18.0444 \cos(\psi_1 + 5\psi_2) - 5903.55 \sin(\psi_1 - 5\psi_2) - \\
& - 19433.1 \sin(\psi_1 - 3\psi_2) - 1245.67 \sin(3\psi_1 - 3\psi_2) - 22157.5 \sin(\psi_1 - \psi_2) - \\
& - 3384 \sin(3\psi_1 - \psi_2) - 10907.3 \sin(\psi_1 + \psi_2) - 3059.96 \sin(3\psi_1 + \psi_2) - \\
& - 1996.28 \sin(\psi_1 + 3\psi_2) - 920.238 \sin(3\psi_1 + 3\psi_2) - \\
& - 307.667 \sin(\psi_1 + 5\psi_2)) \sqrt{T_1} T_2^{3/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{24} = & -\frac{\partial F_3^*}{\partial \psi_2} - \frac{\partial F_4^*}{\partial \psi_{21}} = (-17.8398 \cos(2\psi_1 - 2\psi_2) - 156.52 \cos(4\psi_1 - 2\psi_2) - \\
& -10.2235 \cos 2\psi_2 + 424.423 \sin(2\psi_1 - 2\psi_2) + 286.773 \sin(4\psi_1 - 2\psi_2) - \\
& -294.863 \sin 2\psi_2) T_1^2 + (-310.567 \cos(\psi_1 - 3\psi_2) - 1904.23 \cos(3\psi_1 - 3\psi_2) - \\
& -386.624 \cos(\psi_1 - \psi_2) - 883.427 \cos(3\psi_1 - \psi_2) - 147.364 \cos(5\psi_1 - \psi_2) - \\
& -3.8931 \cos(\psi_1 + \psi_2) + 489.574 \cos(3\psi_1 + \psi_2) + 123.149 \cos(5\psi_1 + \psi_2) + \\
& + 312.212 \cos(\psi_1 + 3\psi_2) + 110.73 \cos(3\psi_1 + 3\psi_2) + 5751.5 \sin(\psi_1 - 3\psi_2) + \\
& + 4633.9 \sin(3\psi_1 - 3\psi_2) + 3032.86 \sin(\psi_1 - \psi_2) + 2608.02 \sin(3\psi_1 - \psi_2) + \\
& + 212.35 \sin(5\psi_1 - \psi_2) - 2151.34 \sin(\psi_1 + \psi_2) - 1197.0 \sin(3\psi_1 + \psi_2) - \\
& -191.285 \sin(5\psi_1 + \psi_2) - 2641.94 \sin(\psi_1 + 3\psi_2) - \quad (3.94) \\
& -385.322 \sin(3\psi_1 + 3\psi_2) T_1^{3/2} \sqrt{T_2} + (-6009.18 \cos(2\psi_1 - 4\psi_2) - \\
& -5290.05 \cos(2\psi_1 - 2\psi_2) - 563.8 \cos(4\psi_1 - 2\psi_2) - 472.79 \cos 2\psi_2 - \\
& -1593.64 \cos 4\psi_2 + 1921.88 \cos(2\psi_1 + 2\psi_2) + 388.344 \cos(4\psi_1 + 2\psi_2) + \\
& + 198.872 \cos(2\psi_1 + 4\psi_2) + 21339.3 \sin(2\psi_1 - 4\psi_2) + \\
& + 25354.1 \sin(2\psi_1 - 2\psi_2) + 1035.9 \sin(4\psi_1 - 2\psi_2) - 19048.6 \sin 2\psi_2 - \\
& -16877.1 \sin 4\psi_2 - 6657.84 \sin(2\psi_1 + 2\psi_2) - \\
& -855.74 \sin(4\psi_1 + 2\psi_2) - 2026.35 \sin(2\psi_1 + 4\psi_2)) T_1 T_2 +
\end{aligned}$$

Решения систем (3.86) и (3.92) были получены методом, предложенным в нашей монографии [46].

Из всего множества решений этих систем выбираем такое, которое дает для нового гамильтониана $W(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2)$ именно форму (3.84), поэтому решения систем (3.86) и (3.92), удовлетворяющие этому важному условию, как показано в той же монографии, имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned}
U_{13} = & (0.198854\cos\psi_1 + 1.7929\cos 3\psi_1 - 2.19865\sin\psi_1 - \\
& - 4.80908\sin 3\psi_1)T_1^{3/2} + 6.17985\cos(2\psi_1 - \psi_2) + \\
& + 4.81954\cos(2\psi_1 + \psi_2) - 24.2218\sin(2\psi_1 - \psi_2) - \\
& - 22.0542\sin(2\psi_1 + \psi_2))T_1\sqrt{T_2} + (6.6053\cos\psi_1 + \\
& + 4.79616\cos(\psi_1 - 2\psi_2) + 1.93725\cos(\psi_1 + 2\psi_2) - 63.6823\sin\psi_1 - \\
& - 34.0119\sin(\psi_1 - 2\psi_2) - 29.9092\sin(\psi_1 + 2\psi_2))\sqrt{T_1}T_2,
\end{aligned} \tag{3.95}$$

$$\begin{aligned}
U_{23} = & (-3.08992\cos(2\psi_1 - \psi_2) + 3.35278\cos\psi_2 + \\
& + 2.40977\cos(2\psi_1 + \psi_2) + 12.1109\sin(2\psi_1 - \psi_2) - 15.9019\sin\psi_2 - \\
& - 11.0271\sin(2\psi_1 + \psi_2))T_1\sqrt{T_2} + (-9.5223\cos(\psi_1 - 2\psi_2) + \\
& + 3.8745\cos(\psi_1 + 2\psi_2) + 68.0238\sin(\psi_1 - 2\psi_2) - \\
& - 59.8184\sin(\psi_1 + 2\psi_2))\sqrt{T_1}T_2 + (13.2145\cos\psi_2 - \\
& - 0.710198\cos 3\psi_2 - 115.146\sin\psi_2 - 116.451\sin 3\psi_2)T_2^{3/2},
\end{aligned} \tag{3.96}$$

$$\begin{aligned}
V_{13} = & (-3.29797\cos\psi_1 - 2.40454\cos 3\psi_1 - 0.29828\sin\psi_1 - \\
& - 0.89645\sin 3\psi_1)\sqrt{T_1} + (-12.1109\cos(2\psi_1 - \psi_2) - 15.9019\cos\psi_2 - \\
& - 11.0271\cos(2\psi_1 + \psi_2) - 3.08992\sin(2\psi_1 - \psi_2) - 3.35278\sin\psi_2 - \\
& - 2.40977\sin(2\psi_1 + \psi_2))\sqrt{T_2} + (-31.841\cos\psi_1 - \\
& - 17.0059\cos(\psi_1 - 2\psi_2) - 14.9546\cos(\psi_1 + 2\psi_2) - \\
& - 3.30265\sin\psi_1 - 2.39808\sin(\psi_1 - 2\psi_2) - \\
& - 0.968625\sin(\psi_1 + 2\psi_2))T_1^{-1/2}T_2,
\end{aligned} \tag{3.97}$$

$$\begin{aligned}
V_{23} = & (-63.6823\cos\psi_1 - 34.0119\cos(\psi_1 - 2\psi_2) - \\
& - 29.9092\cos(\psi_1 + 2\psi_2) - 6.6053\sin\psi_1 - 4.79616\sin(\psi_1 - 2\psi_2) - \\
& - 1.93725\sin(\psi_1 + 2\psi_2))\sqrt{T_1} + (-6.05544\cos(2\psi_1 - \psi_2) - \\
& - 7.95093\cos\psi_2 - 5.51356\cos(2\psi_1 + \psi_2) - 1.54496\sin(2\psi_1 - \psi_2) - \\
& - 1.67639\sin\psi_2 - 1.20489\sin(2\psi_1 + \psi_2))T_1T_2^{-1/2} + \\
& + (-172.72\cos\psi_2 - 58.2256\cos 3\psi_2 - 19.8218\sin\psi_2 + \\
& + 0.355099\sin 3\psi_2)\sqrt{T_2}.
\end{aligned} \tag{3.98}$$

$$\begin{aligned}
U_{14} = & (258.995\cos 2\psi_1 + 184.936\cos 4\psi_1 + 29.8691\cos 6\psi_1 + \\
& + 193.486\cos(2\psi_1 - 2\psi_2) + 137.126\cos(4\psi_1 - 2\psi_2) + \\
& + 24.5115\sin 2\psi_1 + 91.63\sin 4\psi_1 + 25.8666\sin 6\psi_1 + \\
& + 8.13283\sin(2\psi_1 - 2\psi_2) + 74.8434\sin(4\psi_1 - 2\psi_2))T_1^2 + \\
& + (1473.31\cos(\psi_1 - 3\psi_2) + 1408.34\cos(3\psi_1 - 3\psi_2) + \\
& + 2765.24\cos(\psi_1 - \psi_2) + 2535.46\cos(3\psi_1 - \psi_2) + \\
& + 209.216\cos(5\psi_1 - \psi_2) + 2411.01\cos(\psi_1 + \psi_2) + \\
& + 143.944\cos(3\psi_1 + 3\psi_2) + 1246.3\cos(3\psi_1 + \psi_2) + \\
& + 196.373\cos(5\psi_1 + \psi_2) + 1280.36\cos(\psi_1 + 3\psi_2) + \\
& + 79.5554\sin(\psi_1 - 3\psi_2) + 578.735\sin(3\psi_1 - 3\psi_2) + \\
& + 352.508\sin(\psi_1 - \psi_2) + 858.848\sin(3\psi_1 - \psi_2) + \\
& + 145.188\sin(5\psi_1 - \psi_2) - 4.36304\sin(\psi_1 + \psi_2) + \\
& + 509.73\sin(3\psi_1 + \psi_2) + 126.425\sin(5\psi_1 + \psi_2) + \\
& + 151.307\sin(\psi_1 + 3\psi_2) + 41.3652\sin(3\psi_1 + 3\psi_2))T_1^{3/2}\sqrt{T_2} + \\
& + (10186.3\cos 2\psi_1 + 946.024\cos 4\psi_1 + 4449.33\cos(2\psi_1 - 4\psi_2) + \\
& + 11558\cos(2\psi_1 - 2\psi_2) + 495.337\cos(4\psi_1 - 2\psi_2) + \\
& + 3730.74\cos(2\psi_1 + 2\psi_2) + 453.533\cos(4\psi_1 + 2\psi_2) + 641.206\cos(2\psi_1 + 4\psi_2) \\
& + 2245.3\sin 2\psi_1 + 471.942\sin 4\psi_1 + 1252.94\sin(2\psi_1 - 4\psi_2) + \\
& + 2411.63\sin(2\psi_1 - 2\psi_2) + 269.591\sin(4\psi_1 - 2\psi_2) + 1076.93\sin(2\psi_1 + 2\psi_2), \\
& + 205.818\sin(4\psi_1 + 2\psi_2) + 62.93\sin(2\psi_1 + 4\psi_2)T_1T_2 + \\
& + (3920.68\cos(\psi_1 - 5\psi_2) + 14934\cos(\psi_1 - 3\psi_2) + 378.585\cos(3\psi_1 - 3\psi_2) + \\
& + 20202.4\cos(\psi_1 - \psi_2) + 378.585\cos(3\psi_1 - 3\psi_2) + 1096.66\cos(3\psi_1 - \psi_2) + \\
& + 12223.9\cos(\psi_1 + \psi_2) + 343.772\cos(3\psi_1 + 3\psi_2) + 1061.98\cos(3\psi_1 + \psi_2) + \\
& + 2902.37\cos(\psi_1 + 3\psi_2) + 636.562\cos(\psi_1 + 5\psi_2) + 577.278\sin(\psi_1 - 5\psi_2) + \\
& + 592.616\sin(\psi_1 - 3\psi_2) + 3419.52\sin(\psi_1 - \psi_2) + 155.574\sin(3\psi_1 - 3\psi_2) + \\
& + 405.033\sin(3\psi_1 - \psi_2) - 661.658\sin(\psi_1 + \psi_2) + 98.7898\sin(3\psi_1 + 3\psi_2) + \\
& + 348.441\sin(3\psi_1 + \psi_2) + 1137.65\sin(\psi_1 + 3\psi_2) + \\
& + 37.3338\sin(\psi_1 + 5\psi_2))\sqrt{T_1T_2}^{3/2},
\end{aligned} \tag{3.99}$$

$$\begin{aligned}
U_{24} = & (-193.486\cos(2\psi_1 - 2\psi_2) - 68.5628\cos(4\psi_1 - 2\psi_2) - \\
& -1441.98\cos 2\psi_2 - 8.13283\sin(2\psi_1 - 2\psi_2) - 37.4217\sin(4\psi_1 - 2\psi_2) + \\
& + 49.9963\sin 2\psi_2)T_1^2 + (-4419.93\cos(\psi_1 - 3\psi_2) - 1408.34\cos(3\psi_1 - 3\psi_2) - \\
& - 2765.24\cos(\psi_1 - \psi_2) - 845.1547\cos(3\psi_1 - \psi_2) - 41.8433\cos(5\psi_1 - \psi_2) + \\
& + 2411.01\cos(\psi_1 + \psi_2) + 143.944\cos(3\psi_1 + 3\psi_2) + 415.432\cos(3\psi_1 + \psi_2) + \\
& + 39.2746\cos(5\psi_1 + \psi_2) + 3841.08\cos(\psi_1 + 3\psi_2) - 238.666\sin(\psi_1 - 3\psi_2) - \\
& - 352.508\sin(\psi_1 - \psi_2) - 578.735\sin(3\psi_1 - 3\psi_2) - 286.283\sin(3\psi_1 - \psi_2) - \\
& - 29.0376\sin(5\psi_1 - \psi_2) - 4.36304\sin(\psi_1 + \psi_2) + 41.3652\sin(3\psi_1 + 3\psi_2) + \\
& + 169.091\sin(3\psi_1 + \psi_2) + 25.2849\sin(5\psi_1 + \psi_2) + \quad (3.100) \\
& + 453.922\sin(\psi_1 + 3\psi_2)T_1^{3/2}\sqrt{T_2} + (-8898.65\cos(2\psi_1 - 4\psi_2) - \\
& - 11558.4\cos(2\psi_1 - 2\psi_2) - 247.669\cos(4\psi_1 - 2\psi_2) - 93154.4\cos 2\psi_2 - \\
& - 41267.5\cos 4\psi_2 + 3730.74\cos(2\psi_1 + 2\psi_2) + 226.767\cos(4\psi_1 + 2\psi_2) + \\
& + 1282.41\cos(2\psi_1 + 4\psi_2) - 2505.87\sin(2\psi_1 - 4\psi_2) - \\
& - 2411.63\sin(2\psi_1 - 2\psi_2) - \\
& - 134.795\sin(4\psi_1 - 2\psi_2) + 2312.11\sin 2\psi_2 + 3896.73\sin 4\psi_2 + \\
& + 1076.93\sin(2\psi_1 + 2\psi_2) + 102.909\sin(4\psi_1 + 2\psi_2) + \\
& + 125.86\sin(2\psi_1 + 4\psi_2))T_1T_2 + \\
& (-4346.17\cos(\psi_1 - 5\psi_2) - 2313.45\cos(\psi_1 - 3\psi_2) - \\
& - 511.891\cos(3\psi_1 - 3\psi_2) - \\
& - 3750.45\cos(\psi_1 - \psi_2) - 416.624\cos(3\psi_1 - \psi_2) - 590.394\cos(\psi_1 + \psi_2) + \\
& + 334.662\cos(3\psi_1 + \psi_2) + 2347.47\cos(\psi_1 + 3\psi_2) + \\
& + 264.449\cos(3\psi_1 + 3\psi_2) + \\
& + 90.222\cos(\psi_1 + 5\psi_2) + 29517.7\sin(\psi_1 - 5\psi_2) + 58299.2\sin(\psi_1 - 3\psi_2) + \\
& + 1245.67\sin(3\psi_1 - 3\psi_2) + 22157.5\sin(\psi_1 - \psi_2) + 1128.05\sin(3\psi_1 - \psi_2) - \\
& - 10907.3\sin(\psi_1 + \psi_2) - 1019.99\sin(3\psi_1 + \psi_2) - 5988.83\sin(\psi_1 + 3\psi_2) - \\
& - 920.238\sin(3\psi_1 + 3\psi_2) - 1538.34\sin(\psi_1 + 5\psi_2))\sqrt{T_1}T_2^{3/2} + \\
& + (2462.73\cos 2\psi_2 - 3632.16\cos 4\psi_2 + 152.204\cos 6\psi_2 + 13625\sin 2\psi_2 + \\
& + 25362.7\sin 4\psi_2 + 12478\sin 6\psi_2)T_2^2.
\end{aligned}$$

Этап 9. Окончательная форма преобразованного гамильтониана $W(T_1, T_2, \psi_1, \psi_2)$

После реализации преобразования (3.85) с найденными функциями (3.95)-(3.100), получаем для *нового, преобразованного гамильтониана ограниченной проблемы шести тел, исследованной Н.И.Земцовой, следующее аналитическое выражение*

$$W(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2) = W_2(T_1, T_2) + W_4(T_1, T_2) + W_5(\psi_1, \psi_2, T_1, T_2) + \dots,$$

где

$$W_2 = \sigma_1 T_1 - \sigma_2 T_2 = 0.99453 T_1 - 0.102242 T_2, \quad (3.101)$$

$$W_4 = -197.657 T_1^2 - 5339.05 T_1 T_2 + 2591.95 T_2^2. \quad (3.102)$$

Вывод. Положение равновесия S_1 с координатами $x^* = 0.237355$, $y^* = 0.971439$, вычисленными при заданных величинах параметров модели $m_1 = 0,001$ и $\alpha = 0,99985$ является устойчивым по Ляпунову.

В заключение отметим, что изложенный выше алгоритм впервые был реализован в полном объеме в работах Д.Козак и ее результаты подробно изложены в совместной монографии [46].

п.3.10. ОПИСАНИЕ ОБЩЕГО АЛГОРИТМА НОРМАЛИЗАЦИИ ГАМИЛЬТониАНА В ОГРАНИЧЕННОЙ ПРОБЛЕМЕ 10-ти ТЕЛ

Рассмотрим, в качестве второго примера, ограниченную задачу 9-ти тел, геометрическая модель которой изображается двумя подобными гомотетичными гравитирующими ромбами, лежащими в одной плоскости и вращающимися с постоянной угловой

скоростью ω вокруг общего центра, в котором находится тело P_0 с массой $m_0 = 1$. В вершинах одного ромба находятся тела P_1, P_2, P_3, P_4 с массами m_1, m_2, m_3, m_4 , а в вершинах второго – тела P_5, P_6, P_7, P_8 с массами m_5, m_6, m_7, m_8 соответственно.

Эту задачу подробно также исследовала Н.И.Земцова [103]. Она сначала получила все точные соотношения и зависимости между геометрическими и динамическими параметрами конфигурации, гарантирующие ее существование. Далее, согласно «общему алгоритму», было исследовано «качество устойчивости» движения нулевой массы (точки P) в поле гравитации перечисленных девяти тел, $P_0, P_1, \dots, P_8$.

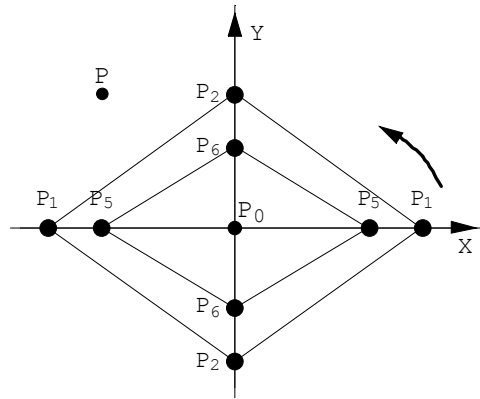


Рис. 53

Обозначим координаты вершин ромбов следующим образом:

$$P_1(\alpha, 0), P_2(0, 1), P_3(-\alpha, 0), P_4(0, -1), P_5(\beta, 0), P_6(0, \beta/\alpha), \\ P_7(-\beta, 0), P_8(0, -\beta/\alpha)$$

Автор получила соотношения, связывающие размеры ромбов, массы тел в его вершинах и угловую скорость вращения конфигурации, выражающие необходимые и достаточные условия су-

существования решений, гарантирующие существование именно той конфигурации, которая изображена на рис. 53. Тем самым Н.И. Земцова показала, что множество значений – параметров α , β , характеризующих размеры ромбов и массы тел $m_0, m_1, m_2, \dots, m_8$, в их вершинах, для которых существует изображенное точное решение задачи 9-ти тел, «не пусто».

Существование описанного выше точного гомографического решения в задаче 9-ти тел позволяет ввести понятие «ограниченной задачи 10-ти тел», в которой исследуется движение тела P с бесконечно малой массой μ в гравитационном поле, создаваемом перечисленными выше гравитирующими точками $P_0, P_1, P_2, \dots, P_8$.

Уравнения движения бесконечно малой массы во вращающейся системе координат P_0xyz , в плоскости $z = 0$ имеют вид [27,46,103]

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} = & \omega^2 x + 2\omega \frac{dy}{dt} - \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{m_1(x - \alpha)}{((x - \alpha)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{m_2x}{(x^2 + (y - 1)^2)^{3/2}} - \\ & - \frac{m_1(x + \alpha)}{((x + \alpha)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{m_2x}{(x^2 + (y + 1)^2)^{3/2}} - \frac{m_5(x - \beta)}{((x - \beta)^2 + y^2)^{3/2}} - \\ & - \frac{m_6x}{(x^2 + (y - \beta/\alpha)^2)^{3/2}} - \frac{m_5(x + \beta)}{((x + \beta)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{m_6x}{(x^2 + (y + \beta/\alpha)^2)^{3/2}}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = & \omega^2 y - 2\omega \frac{dx}{dt} - \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{m_1y}{((x - \alpha)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{m_2(y - 1)}{(x^2 + (y - 1)^2)^{3/2}} - \\ & - \frac{m_1y}{((x + \alpha)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{m_2(y + 1)}{(x^2 + (y + 1)^2)^{3/2}} - \frac{m_5y}{((x - \beta)^2 + y^2)^{3/2}} - \\ & - \frac{m_6(y - \beta/\alpha)}{(x^2 + (y - \beta/\alpha)^2)^{3/2}} - \frac{m_5y}{((x + \beta)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{m_6(y + \beta/\alpha)}{(x^2 + (y + \beta/\alpha)^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Поиск стационарных решений системы (3.103) сводится, как мы уже знаем, к решению системы двух алгебраических иррациональных уравнений относительно неизвестных x, y :

$$\left\{ \begin{aligned} & \omega^2 x - \frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{m_1(x - \alpha)}{((x - \alpha)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{m_2 x}{(x^2 + (y - 1)^2)^{3/2}} - \\ & - \frac{m_1(x + \alpha)}{((x + \alpha)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{m_2 x}{(x^2 + (y + 1)^2)^{3/2}} - \frac{m_5(x - \beta)}{((x - \beta)^2 + y^2)^{3/2}} - \\ & - \frac{m_6 x}{(x^2 + (y - \beta/\alpha)^2)^{3/2}} - \frac{m_5(x + \beta)}{((x + \beta)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{m_6 x}{(x^2 + (y + \beta/\alpha)^2)^{3/2}} = 0, \\ & \omega^2 y - \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{m_1 y}{((x - \alpha)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{m_2(y - 1)}{(x^2 + (y - 1)^2)^{3/2}} - \\ & - \frac{m_1 y}{((x + \alpha)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{m_2(y + 1)}{(x^2 + (y + 1)^2)^{3/2}} - \frac{m_5 y}{((x - \beta)^2 + y^2)^{3/2}} - \\ & - \frac{m_6(y - \beta/\alpha)}{(x^2 + (y - \beta/\alpha)^2)^{3/2}} - \frac{m_5 y}{((x + \beta)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{m_6(y + \beta/\alpha)}{(x^2 + (y + \beta/\alpha)^2)^{3/2}} = 0. \end{aligned} \right. \quad (3.104)$$

Графическое решение системы (3.104) в виде точек S_i и N_i , для значений параметров этой динамической модели, $m_1 = 0.01$, $\alpha = 0.92$, $\beta = 1.3$, изображено на рис. 54:

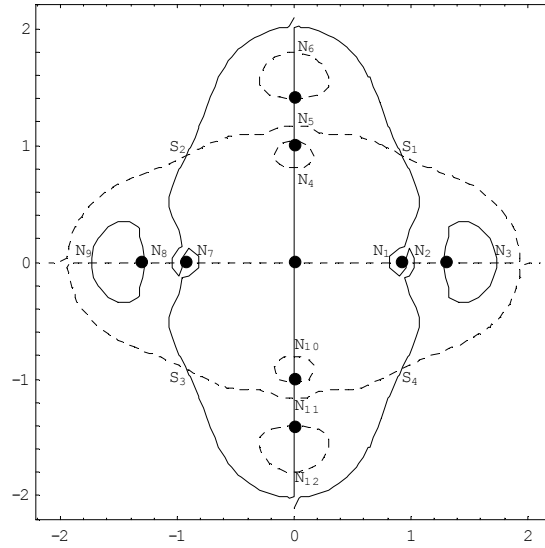


Рис. 54

На этом рисунке «жирными» точками изображены девять тел, $P_0, P_1, \dots, P_8$, а нарисованные кривые представляют собой графики неявных функций (3.104).

Решением этой нелинейной системы, очевидно, являются точки пересечения этих кривых, и для выбранного нами конкретного случая, система (3.104) имеет 16 решений, изображаемых шестнадцатью точками: $S_1, S_2, S_3, S_4, N_1, \dots, N_{12}$.

Далее, используя известный итерационный метод Ньютона решения функциональных уравнений [27], Н.И.Земцова вычислила с большой точностью координаты указанных точек, оказавшиеся равными: $(\pm 0.9246, \pm 0.9149)$, $(\pm 0.8040, 0.0000)$, $(\pm 1.0228, 0.0000)$, $(\pm 1.7339, 0.0000)$, $(0.0000, \pm 0.7986)$, $(0.0000, \pm 1.1705)$, $(0.0000, \pm 1.7989)$. Мы здесь привели значения координат стационарных точек с точностью 10^{-4} , но, естественно, они были вычислены с существенно большей точностью.

Далее, для исследования линейной устойчивости найденных стационарных решений необходимо осуществить линеаризацию дифференциальных уравнений нашей модели в окрестности каждой из точек равновесия S_i и N_i .

Варьируя значения параметров модели, величин m_1, α, β , Н.И. Земцова показала, что только стационарные точки S_1, S_2, S_3, S_4 могут быть устойчивыми, а собственные значения двенадцати стационарных точек $N_k, k=1, 2, \dots, 12$, лежащих на координатных осях, для всех «обозримых значений параметров» m_1, α, β имеют ненулевые действительные части.

Следовательно, стационарные точки N_k линейно неустойчивы, из чего автоматически вытекает их неустойчивость и в смысле Ляпунова.

Кроме того, автор нашла и такие интервалы изменения параметров, для которых собственные значения матрицы соответствующей линеаризованной модели являются чисто мнимыми числами, и, следовательно, стационарные решения S_k являются линейно устойчивыми.

Например, для значения $m_1 = 0.001$ интервалы линейной устойчивости приведены в следующей таблице.

Таблица. Интервалы линейной устойчивости для $m_1 = 0.001$

α	β	α	β
0.89	(1.0211, 1.0213)	0.90	(1.0310, 1.0410)
0.91	(1.0310, 1.0510)	0.92	(1.0312, 1.0613)
0.93	(1.0410, 1.0710)	0.94	(1.0410, 1.0810)
0.95	(1.0510, 1.1010)	0.96	(1.0513, 1.1110)
0.97	(1.0411, 1.0812)	0.98	(1.0612, 1.1313)
0.99	(1.0710, 1.1410)	1.00	(1.0710, 1.1610)

Для исследования ляпуновской устойчивости необходимо перейти к гамильтоновой системе дифференциальных уравнений с гамильтонианом

$$\begin{aligned}
 H = & \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \omega(y p_x - x p_y) + \frac{m_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \\
 & - m_1 \left(\frac{1}{\sqrt{(x - \alpha)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x + \alpha)^2 + y^2}} \right) - \\
 & - m_2 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - 1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y + 1)^2}} \right) - \\
 & - m_3 \left(\frac{1}{\sqrt{(x - \beta)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(x + \beta)^2 + y^2}} \right) - \\
 & - m_4 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + (y - \beta / \alpha)^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y + \beta / \alpha)^2}} \right)
 \end{aligned} \tag{3.105}$$

и в окрестности каждого линейно устойчивого стационарного решения необходимо реализовать степенное разложение гамильтониана (разложение «в ряд Тейлора») с точностью до четвертых степеней его аргументов.

Рассмотрим, например, стационарную точку S_1 с координатами $x=0.723635$, $y=0.715406$, вычисленными при $m_1 = 0.001$, $\alpha = 0.97$, $\beta = 1.061$.

Для этого положения равновесия собственные значения матрицы линеаризованной системы *суть мнимые числа* $\pm 0.943212i$, $\pm 0.2329176i$, то есть данное стационарное решение *линейно устойчиво*.

Тогда степенное разложение гамильтониана в окрестности данной точки имеет вид

$$H = H_2(x, y, p_x, p_y) + H_3(x, y) + H_4(x, y) + \dots,$$

где однородные функции H_k ($k=2,3,4$) выражаются формулами:

$$\begin{aligned} H_2 &= \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - 0.976187(p_y x + p_x y) - 0.247848x^2 - \\ &\quad - 1.41449xy - 0.231666y^2, \\ H_3 &= -0.150313x^3 + 1.4904x^2y - 1.45097xy^2 - 0.167156y^3, \\ H_4 &= 0.366693x^4 - 0.612459x^3y - 3.26793x^2y^2 - \\ &\quad - 0.52002xy^3 + 0.373085y^4. \end{aligned}$$

Далее, необходимо выполнить цепочку невырожденных канонических преобразований Пуанкаре-Биркгофа, описанных в п.3.9:

$$(x, y, p_x, p_y) \rightarrow (q_1, q_2, p_1, p_2) \rightarrow (\theta_1, \theta_2, \tau_1, \tau_2) \rightarrow (\psi_1, \psi_2, T_1, T_2).$$

Окончательное представление для преобразованного гамильтониана имеет вид: $\sigma_1 = 0.943212$ $\sigma_2 = 0.239176$;

$$\begin{aligned}
W &= W_2(T_1, T_2) + W_4(T_1, T_2) = \\
&= \sigma_1 T_1 - \sigma_2 T_2 - 158.591 T_1^2 - 1750 T_1 T_2 + 589.584 T_2^2 + \dots, \quad (3.36) \\
W_4(\sigma_1, \sigma_2) &= 120.663.
\end{aligned}$$

Представление (3.36) гамильтониана ограниченной проблемы 10-ти тел, полученное Н.И.Земцовой позволяет заключить, что все условия теоремы Арнольда-Мозера, приведенной в п.3.8 выполнены, и, следовательно, *стационарное решение с декартовыми координатами $x=0.723635$, $y=0.715406$ и с «нулевыми скоростями ($dx/dt = 0$, $dy/dt = 0$) является устойчивым по Ляпунову.*

п.3.11. ПРОГРАММЫ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В МЕТОДЕ НОРМАЛИЗАЦИИ ГАМИЛЬТонианов по БИРКГОФУ

Раньше мы писали, что процедура нормализации по Биркгофу гамильтонианов в теории условно–периодических решений гамильтоновых систем практически нереализуема без использования систем компьютерных алгебр, включенных, например, в известные Системы Программирования «Mathematica» [1,2] и «Maple» [3]. Поэтому мы сочли целесообразным привести здесь основные программы компьютерной алгебры, которыми я и мои коллеги пользовались не один раз при решении задач теоретической космической динамики, *связанных с исследованием ляпуновской устойчивости стационарных решений гамильтоновых систем.*

Приведенные ниже программы, реализованные в системе Mathematica, можно также найти в монографии «Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел», авторы, Е.А.Гребеников, Д.Козак-Сковородкина, М.Якубяк, Москва, Изд-во РУДН, 2002 г., 212 с.

Программа 1. Программа изображающая графическое решение ограниченной проблемы n тел:

```

grapheq[□, n_, xs_, xe_, ys_, ye_, pts_] := Module[{s},
  s = N[Sum[Sin[ $\frac{\pi (k-1)}{n-1}$ ]-1], {k, 2, n-1}];
  ω =  $\sqrt{1 + \frac{\mu s}{4}}$ ;
  xk[k_] := Cos[ $\frac{2 \pi (k-1)}{n-1}$ ];
  yk[k_] := Sin[ $\frac{2 \pi (k-1)}{n-1}$ ];
  f = x ( $\omega^2 - \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ ) -
    μ Sum[ $\frac{x - xk[k]}{((x - xk[k])^2 + (y - yk[k])^2)^{3/2}}$ ], {k, 1, n-1};
  f = y ( $\omega^2 - \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ ) -
    μ Sum[ $\frac{y - yk[k]}{((x - xk[k])^2 + (y - yk[k])^2)^{3/2}}$ ], {k, 1, n-1};
  cpx = ContourPlot[f, {x, xs, xe}, {y, ys, ye},
    Contours -> {0}, ContourShading -> False,
    PlotPoints -> pts,
    DisplayFunction -> Identity];
  cpy = ContourPlot[g, {x, xs, xe}, {y, ys, ye},
    Contours -> {0}, ContourShading -> False,
    PlotPoints -> pts, DisplayFunction -> Identity,
    ContourStyle -> Hue[0]];
  p0 = Graphics[{RGBColor[0, 0, 1],
    PointSize[0.019], Point[{0, 0}]}];
  pn = Graphics[{PointSize[0.019],
    Table[Point[{xk[k], yk[k]}], {k, 1, n-1}]}];
  Show[cpx, cpy, p0, pn,
    DisplayFunction -> $DisplayFunction] ]

```

Программа 2. Программа вычисления в аналитическом виде гамильтониана задачи n тел:

$$\begin{aligned}
 H[n_] &:= \text{Module}[\{s\}, \omega = \sqrt{1 + \frac{\mu s}{4}} \\
 s &= \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{\text{Sin}[\pi (k-1) / (n-1)]} ; \\
 xk[k_] &:= \text{Cos}\left[\frac{2 \pi (k-1)}{n-1}\right] ; \quad yk[k_] := \text{Sin}\left[\frac{2 \pi (k-1)}{n-1}\right] ; \\
 U &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} + \mu \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{((x - xk[k])^2 + (y - yk[k])^2)^{1/2}} ; \\
 \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) &+ \omega (p_x y - p_y x) - U]
 \end{aligned}$$

Программа 3. Программа построения матрицы линеаризованной гамильтоновой системы:

$$\begin{aligned}
 \text{matrix}[n_ , x_ , y_ , m_] &:= \text{Module}[\{s\}, s = \sum_{k=2}^{n-1} \text{Sin}\left(\frac{\pi (k-1)}{n-1}\right) ; \\
 \omega &= \sqrt{1 + \frac{\mu s}{4}} ; \\
 xk[k_] &:= \text{Cos}\left[\frac{2 \pi (k-1)}{n-1}\right] ; \quad yk[k_] := \text{Sin}\left[\frac{2 \pi (k-1)}{n-1}\right] ; \\
 a &= -m \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{3 (x - xk[k])^2}{((x - xk[k])^2 + (y - yk[k])^2)^{5/2}} - \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{((x - xk[k])^2 + (y - yk[k])^2)^{3/2}} \right) - \frac{3 x^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}} ; \\
 b &= -m \sum_{k=1}^{n-1} \left(- \frac{1}{((x - xk[k])^2 + (y - yk[k])^2)^{5/2}} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{3 (y - y[k])^2}{((x - x[k])^2 + (y - y[k])^2)^{3/2}} - \frac{3 y^2}{(x^2 + y^2)^{5/2}} + \frac{1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}; \\
c = & -m \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{3 (x - x[k]) (y - y[k])}{((x - x[k])^2 + (y - y[k])^2)^{5/2}} - \frac{3 x y}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \right); \\
A = & \begin{pmatrix} 0 & \omega & 1 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & 1 \\ -a & -c & 0 & \omega \\ -c & -b & -\omega & 0 \end{pmatrix};
\end{aligned}$$

Программа 4. Программа вычисления миноров матрицы:

```

determinant[A_, columns_, rows_] :=
Module[{f}, f=Delete[#1,
Partition[columns, 1]] &;
A1=Delete[Map[f, A], Partition[rows, 1]];
Det[A1]]

```

Эта программа позволяет вычислить любой минор, любой матрицы. Например, $determinant[A, \{1,2\}, \{2,3\}]$ означает вычисление определителя матрицы A^* , полученной из матрицы A после зачеркивания первого и второго ее столбцов, второй и третьей ее строк.

п.3.12. КРАТКОЕ ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Гамильтонова динамика достаточно успешно уже используется сегодня и наверняка намного активнее будет использована в будущем, в исследованиях моделей, описывающих в том или ином приближении реальную природу, к которой безусловно относятся макрообразования космогонических масштабов, с одной стороны, и атомарные, молекулярные физические, биологические, геологические и другие структуры, с другой стороны. Об этом убедительно говорят большие успехи землян в освоении околоземного и околосолнечного пространств, а также достижения в познании свойств далекого от нас Космоса.

В 21-м столетии следует ожидать от «Науки»+«Практики» существенно более масштабных успехов в исследовании глобальных свойств *Материи* и в «раскрытии» секретов *Природы*, если случайно не произойдет какое-либо крупно масштабное, нелогичное и очевидно нежелательное событие планетарного масштаба.

У исследователей-оптимистов всегда присутствует надежда на то, что «завтра будет лучше, чем вчера», а точные и прикладные науки, и, в первую очередь, математика, астрономия, физика и механика в творческом союзе с инженерными науками помогут глубже понять «кто мы есть, откуда мы пришли и что будет с нами в будущем».

ЛИТЕРАТУРА

1. Wolfram Stephen (Вольфрам Стефен): The Mathematica Book, 4-th edu., Wolfram Media/Cambridge University Press (1999).
2. В.П.Дьяконов, Mathematica 4.1/4.2/5.0 в математических и научно-технических расчетах, Москва, Солон-Пресс, 2004.
3. Redfern D., Chandler E., Maple, ODE Lab. Book, – New York: Springer, 1996.
4. Дэвенпорт Дж., Сирэ И., Турнье Э., Компьютерная алгебра / пер. с французского Е.В.Панкратьева; под ред. А.В.Михалева, – М.: МИР, 1991.
5. Ньютон И. (Newton I.), Математические начала натуральной философии, дополнение А.Н.Крылова в книге: Крылов А.Н., Собр. Трудов, т.7, М.–Л., 1936.
6. Лагранж Ж. (Lagrange J.), Аналитическая механика, 2-е изд., т.1, М.–Л., 1950.
7. Euler L. (Эйлер Леонард), Opera mechanica et astronomica, v. 1–30, В.– Lpz., 1912–1974.; Основы динамики точки, М.–Л., 1938.
8. Даламбер Ж. (D'Alembert J.), Динамика, М.–Л., 1950.
9. Hamilton W.R. (Гамильтон В.Р.), «Philos.Trans.Roy.Soc.», London, 1835, pp. 95–144.
10. Jacobi C. (Якоби К.), C.G.J. Gesammelte Werke, Bd2, В., 1882, S. 5–16, 23–50.
11. Пуанкаре А. (Poincare H.), Избранные труды, – М.: Наука, т.т. 1–3, 1971, 1972.
12. Роберт В. Себеста, Первый шаг к совершенствованию: язык ALGOL–60. Основные концепции языков программирования = Concepts of Programming Languages, – 5-е изд., «Вильямс», 2001, 672с.
13. Карпов В., Алгоритмический язык ФОРТРАН, «Наука», Москва, 1976, 192 с.
14. Бартенев О.В., Современный ФОРТРАН, –М.: Диалог–МИФИ, 2005.
15. Йенсен К., Вирт Н., ПАСКАЛЬ, Руководство для пользователя и описание языка, – М.: «Финансы и статистика», 1982, 151 с.
16. Дьяконов В.П., MATLAB 6/6.1/6.5 + Simulink 4/5 в математике и моделировании. Полное руководство пользователя. –М.: Солон–Пресс, 2003.
17. Hearn A.C., Reduce–2, User's manual, – Utah: Univ. of Utah, 84112, 1973, 260 p.
18. Дьяконов В.П. Справочник по применению системы PC MatLAB, –М.: Наука, Физматгиз, 1993.
19. Gass R., Mathematica for Scientists and Engineers: Using Mathematica to Do Science, Prentice Hall, 1998.
20. Птолемей Клавдий (Ptolemaios), «Альмагест» или матем. сочинение в 13 книгах. Перевод с древнегреческого языка И.Н.Веселовского, Москва, Наука, Физматлит, 1998 г., 672 с.
21. Коперник Николай, О вращениях небесных сфер, 1543 г., Нюрнберг, Германия.

22. Малкин И.Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний, Гостехиздат, 1949.
23. Степанов В.В., Курс дифференциальных уравнений, –М.: Наука, 1968.
24. Смирнов В.И., Курс высшей математики, т.3, Из-во «Наука», 1974.
25. Ю.С.Сикорский, Элементы теории эллиптических функций. С приложениями к механике. Москва, КомКнига, 2006.
26. Воронцов Б.А., Страут Е.К., Астрономия, 11-й кл., Учебник для общеобразовательных учреждений, Москва, Из-во «Дрефа», 2009г., 222с.
27. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике, под ред. Г.Н.Дубошина, Изд-во «Наука», Гл. ред. Физ.-мат. л-ры, 1976, 854 с.
28. Астрономический Ежегодник, 2009 год, Санкт–Петербург, Ин–т Прикл. Астр. РАН, «Наука», 2008 г.
29. Математическая Энциклопедия, т.1, Изд-во «Советская Энциклопедия», – М., 1977.
30. Ляпунов А.М., Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950.
31. Демидович Б.П., Лекции по математической теории устойчивости, – М., 1967.
32. Зубов В.И., Методы А.М.Ляпунова и их применение, –Л., 1957.
33. Беллман Р., Теория устойчивости дифференциальных уравнений, пер. с английского языка, М., 1954.
34. Ла–Салль Ж., Лефшец С., Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова, пер. с англ., М., 1964.
35. Поляченко В.Л., Фридман А.М., Равновесие и устойчивость гравитационных систем, – М.: 1976.
36. Гребеников Е.А., Смутьский И.И., Эволюция орбиты Марса на интервале времени в сто миллионов лет, Сообщения по Прикл. Математике, Издание ВЦ РАН им. А.А.Дородницына, 2007г., 62 с.
37. Мельников В.П., Смутьский И.И., Астрономическая теория ледниковых периодов: Новые приближения. Решенные и нерешенные проблемы, Новосибирск: Акад. Изд-во «ГЕО», 2009 г., 98с. (книга издана компактно на двух языках (русском яз. и английском яз.)
38. Laskar J. Marginal stability and chaos in the Solar system // Ferraz Mello S. et al. (eds.), Dynamics, ephemerides and astrometry of the Solar System.–IAU: Netherlands, 1996, p. 75–88.
39. Laskar J., Correia A.C.M., Gastineau M., Joutel F., Levrard B. and Robutel P., Long term evolution and chaotic diffusion of the insolation quantities of Mars // Icarus, 2004, vol. 170, iss. 2. P. 343-364.
40. Декарт Р., Геометрия, пер. с фр. и лат., М.–Л., 1938.
41. Гантмахер Ф.Р., Теория матриц, Москва, Физматлит, 2004, 560 с.
42. Пуанкаре А., Лекции по небесной механике, Наука, – М.: 1965.
43. Маркеев А.П., Точки либрации в небесной механике и космодинамике, – М.: Наука, 1978, 312 с.
44. Арнольд В.И., Математические методы классической механики, – М., 1974.

45. Уиттекер Е.Т., Аналитическая динамика, М.–Л., 1937.
46. Гребеников Е.А., Козак–Сковородкина Д., Якубяк М., Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел, Изд-во РУДН, Москва, 2002, 212 с.
47. Hill G., Collected Works, vol. 1, 1905, Washington.
48. Якоби К., Лекции по динамике, ОНТИ, 1936.
49. Берже М., Геометрия, – М.: т.1, 1984, 590 с.
50. Натанзон С.М., Пространства, УМН, т.27, вып.4, с.145-160, 1972.
51. Мостепаненко А.М., Пространство и время в макро-, мега- и микромире, – М.: 1974.
52. Аносов Д.В., Арансон С.Х., Бронштейн И.У., Гринес В.З., Гладкие динамические системы, – М.: Наука, Современные проблемы Математики, т.1, 1985, с. 151–242.
53. Wintner A., The analytical foundations of celestial mechanics – Princeton: Princeton University Press, 1941.
54. Уинтнер А., Аналитические основы небесной механики, – М.: Наука, 1967, 512 с.
55. Dziobek O., Die Matematischen Theorien der Planeten, –Bewegung: 1888.
56. Четаев Н.Г., Устойчивость движения – Работы по аналитической механике, – М.: 1962, 452 с.
57. Ш.Ж. де ля Вале-Пуассен, Лекции по теоретической механике, т.1, т.2, Москва, 1948–1949 г.г., Рос. Изд-во Иностран. Лит-ры.
58. Себекей В., Теория орбит, пер. с англ., Изд-во «Наука», 1982, 657 с.
59. Биркгоф Дж.Д., Динамические системы, – Ижевск: Изд.Дом, «Удмуртский университет», 1999.
60. E.R. van Kampen, A. Wintner, Trans. Amer. Math. Soc., 44 (1938) pp. 168–195.
61. Бурбаки Н., Алгебра, алгебраические структуры, пер. с французского яз., М., 1962 г.
62. Курош А.Г., Лекции по общей алгебре, учебник, Изд-во «Лань», СПб 2005, 555 с.
63. Жуковский Н.Е., Теоретическая механика, М.–Л., 1950.
64. Моисеев Н.Д., Очерки развития механики, Изд-во МГУ, М.: 1961.
65. Гребеников Е.А., Лекции по проблеме трех тел, Сб. «Нелинейные колебания», Изд-во «Наукова Думка», Киев, 1979, 70 с.
66. Bang D., Elmabsout B., Configurations polygones en equilibre relatif, –Paris: C.R.Acad. Sci., t. 329, Serie Lib., 2001, p. 243–248.
67. Kozak D., Oniszk E., Equilibrium Points in the Restricted Four – Body Problem. Sufficient Conditions for Linear Stability, – Bucharest: Rom.Astron.J. vol. 8, №1, 1998, pp. 27–31.
68. Якубяк М., Достаточные условия линейной устойчивости положений равновесия в гравитационной ньютоновой модели шести тел, –Киев: Наукова Думка, Нелінійні коливання, т.2, № 1, 1999, с. 138–144.

69. Л.Я. Гадомский, Е.А. Гребеников, А.Р. Гурская, Н.И. Земцова, Новые классы точных решений в проблеме многих тел, взаимно притягивающих друг друга по произвольному закону, зависящему от взаимных расстояний, // Украинский математический журнал, 1998, т.50, № 3, с.329–337.
70. Диарова Д.М., Земцова Н.И., Ихсанов Е.В., Существование центральных конфигураций в одной модели для ньютоновой проблемы восьми тел, Труды ИСА РАН «Динамика линейных и нелинейных систем», т.25(1), 2006, с.64–71.
71. Земцова Н.И., Чеботару Е.М., Проблема существования семейства стационарных решений в ньютоновой проблеме четырех тел, изображаемых равнобедренными треугольниками с массой внутри их. Сб. материалов II Межд. научно-техн. конф. «Роль физ.-мат. наук в современном образовательном пространстве», Казахстан, Атырау, 15–16 мая 2008 г., с. 53–58.
72. Nechvile V., Sur une nouvelle forme des equations différentielles du probleme restreint elliptique, –Paris: Compte Rendus, 182, с.310, 1926.
73. Гребеников Е.А., О необходимых и достаточных условиях существования гомографических решений ньютоновой проблемы многих тел в неинерциальных системах отсчета, Москва, ПАИМС, Сб. «Нелинейный анализ и гомографическая динамика», 1999, 5–19 с.
74. Пространственно-временной континуум Минковского, Математическая Энциклопедия, т.4.
75. Мостепаненко А., Пространство и время в макро-, мега- и микромире, М.: 1974.
76. Гончар А.А. О новом методе исследования точек равновесия неинерциальной ограниченной проблемы многих тел, Proceedings of The Third International Workshop on «Mathematica» System in Teaching and Research, – Siedlce, September, 5–7, 2001.
77. Гребеников Е.А., Земцова Н.И. О существовании асимметричных решений функциональных уравнений Лагранжа-Винтнера, //Сб. Нелинейный анализ и гомографическая динамика, – М.: ПАИМС, 1999, с. 70-78.
78. Zemtsova N.I. Stability of the stationary solutions of the differential equations of restricted Newtonian problem with incomplete symmetry, – Kiev: // Nonlinear Dynamics and Systems Theory, 2001, v.3(1), pp. 121-130.
79. Е.А. Гребеников, Д. Диарова, Н.И. Земцова, Существование устойчивых ромбоподобных центральных конфигураций в смысле Уинтнера для ньютоновой модели девяти тел. Сб. «Теоретические и прикладные задачи нелинейного анализа», ВЦ РАН, 2006, с. 65-76.
80. Дубошин Г.Н., Небесная механика. Аналитические и качественные методы, – М.: Наука, 1964, 460 с.
81. Routh E.I., Proceedings of the London Mathematical Society, v.6, 1875, – London.
82. Ляпунов А.М., Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950.
83. Демидович Б.П., Лекции по математической теории устойчивости, «Наука», 1967.

84. Мозер Ю., КАМ-теория и проблема устойчивости, Научный Изд. Центр «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевск, 2001, 448 с.
85. Мозер Ю., Лекции о гамильтоновых системах, – М.: МИР, 1973.
86. Арнольд В.И., Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, – М.: Наука, 1978, 206 с.
87. Маркеев А.П., Точки либрации в небесной механике и космодинамике, – М.: Наука, 1978, 312 с.
88. Колмогоров А.Н., О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона, – М.: Наука, Доклады АН СССР, 98, № 4, с.527–530, 1954.
89. Гребеников Е.А., Рябов Ю.А., Резонансы и малые знаменатели в небесной механике, – М.: Наука, 1979, 196 с.
90. Гребеников Е.А., Ихсанов Е.В., Общий алгоритм генерации дифференциальных уравнений ограниченных задач космической динамики, – Brest: Applications of the «Mathematica» System to Social Processes and Mathematical Physic, Proceedings of the international workshop, 3–6 June 2003, p. 27–33.
91. Fetisova, S. On the Newtonian Deltoid Problem/ Svetlana Fetisova, E.A. Grebenicov// Fourth International Workshop, Computer Algebra Systems in Teaching and Research, 2007, Siedlce, Poland, January 31–February 3, 2007 / University of Podlasie; The College of Finance and Management, Wydawnictwo Akademii Polaskiej. – Siedlce, 2007. – p. 112–116.
92. Prokopenya A.N., New Homographic Solutions in the Problem of Four Bodies // Fifth International Symposium on Classical and Celestial Mechanics (August 23–28, 2004, Velikie Luki, Russia): Abstracts.–Moscow, Computing Center of RAS, 2004. – p. 12-13.
93. Cattani C., Grebenikov E.A., Prokopenya A.N., Symbolic calculations in studying the stability of dynamically symmetric satellite motion // Computer Algebra in Scientific Computing: Letter Notes in Computer Science, Vol. 3718. – Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg, 2005.–p.236-245.
94. Е.В.Ихсанов, Компьютерные методы нормализации гамильтонианов ограниченных задач небесной механики, Москва, Изд-во РУДН, 2004, 133с.
95. Fetisova S., Normalization of Hamiltonian of the Newtonian Deltoid Problem /S.Fetisova // CASTR 2009, Evolution, control and stability of dynamical systems. – Siedlce: WSFIS, 2009. – p. 80–81.
96. Щерба С.А. Нормализация кубической и четвертой форм гамильтониана ограниченной дельтоидной задачи пяти тел /Щерба// XIII Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (Еругинские Чтения, –2009): Тезисы Докладов Международной Конференции. Пинск, 26–29 мая 2009г.–Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2009. – с.55–56.
97. Е.А. Гребеников, Д.М. Диарова, Н.И. Земцова, Существование и неустойчивость ромбоподобных центральных конфигураций в смысле Уинтнера

- для ньютоновой модели девяти тел. Сб. «Теоретические и прикладные задачи нелинейного анализа», ВЦ РАН, 2006, с.65-76.
98. D. Diarova, N.I. Zemtsova, The Instability of the Rhombus-Like Central Configurations in Newton 9-body Problem Computer Algebra in Scientific Computing (CASC 2006), LNCS 4194, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, Chisinau, September 11-15, 2006, p.141-148.
 99. Гребеников Е.А., Н.И.Земцова, О существовании ассимметричных решений функциональных уравнений Лагранжа–Винтнера // Нелинейный анализ и гомографическая динамика. –М.: ВЦ РАН, 1999. –С.70–78.
 100. Н.И.Земцова, Новые центральные конфигурации ньютоновой проблемы 10-ти тел. Материалы 3-й международной научной конференции «Актуальные проблемы механики и машиностроения», Казахстан, Алматы, 17-19 июня 2009, -Алматы: Изд-во «ЭВЕРО», 2009, с.11-15.
 101. Маркеев А.П., Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. РХД, 2009, 396с.
 102. Е.А.Гребеников, Н.И.Земцова. Новые гомографические решения в ньютоновой задаче многих тел.Тезисы докладов Международной конференции «Математическое моделирование и вычислительная физика» (Дубна, 7-11 июля 2009 г.), Дубна: ОИЯИ, 2009, с.145-146.
 103. Е.А.Гребеников, Н.И.Земцова О корректности динамической модели Якоби, Сб. «Теоретические и прикладные задачи нелинейного анализа», 2009, с. 176-186.
 104. Гуцу В.Д., Диарова Д.М., Земцова Н.И., Исследование устойчивости стационарных решений ромбоподобной ограниченной задачи десяти тел, //Сб.: Теоретические и прикладные задачи нелинейного анализа. –М.: ВЦ РАН, 2007. –С. 99–109.
 105. Диарова Д.М., Исследование устойчивости по Ляпунову стационарных решений гравитационной модели «ромб–прямоугольник» ограниченной задачи 10-ти тел //Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. – 2009. №2 (61). с. 66-71.
 106. Диарова Д.М., О проблеме устойчивости по Ляпунову стационарных решений ограниченной задачи 19-ти тел модели «ромб–прямоугольник» в случае резонанса частот 3-го порядка //Вестник КазНПУ им. Абая. Серия физико-математические науки. – 2008. № 3(23). – с. 39-43.
 107. Диарова Д.М., Вычисление геометрических и динамических параметров, гарантирующих существование решений в ньютоновой проблеме тринадцати тел //Сб. материалов 2-ой международной научно-теоретической конференции «Роль физико-математических наук в современном образовательном пространстве». – Атырау: АГУ, 2008. – С. 40-45.

108. Силушик А., Konieczne i wystarczające warunki istnienia homograficznych rozwiązań w specjalnym zagadnieniu 7-u i 10-u ciał // *Proceeding of the international workshop*. Brest: Изд-во БрГУ, 2003. С. 206-210.
109. А.Силушик, О линейной устойчивости положений равновесия ограниченной задачи 8-ми тел с неполной симметрией, «Современные прикладные задачи и технологии обучения в математике и информатике (МоАРМІ-2004), Тезисы докладов, г.Брест, 20-23 сентября 2004 г.
110. Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г., Пирогов Е.Н., Некоторые вопросы динамики полета к Венере, *Сообщ. ГАИШ*, №125, 1962 г., с. 12–15.
111. Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Демин В.Г., Пирогов Е.Н., О таблице траекторий перелета на Венеру, «Сообщения ГАИШ», Из-во МГУ, 1963, 20 с.
112. Егоров В.А., Пространственная задача достижения Луны, «Наука», 1965, 224 с.
113. Poisson S.D., «Memoires Acad. De sci.», 1818, t.3, p.121–176.
114. Chazy J., *La theorie de la Relativite et la Mecanique celeste*, tt. 1,2, Paris, 1928–1930.
115. Зигель К.Л., *Лекции по небесной механике*, ИЛ, 1959.
116. Бор Г., *Почти–периодические функции*, Гостехиздат, 1934.
117. Маркеев А.П., *Исследования устойчивости движений в некоторых задачах небесной механики*, Препринт ИПМ АН СССР, 1970.
118. Моисеев Н.Д., *Труды Гос. Астрон. Ин-та им. П.К.Штернберга*, 9, вып. 2, 5-81, 1940.
119. Моисеев Н.Д., Обзор истории развития понятия и теории устойчивости в смысле Ляпунова, *Записки Семинара по теории устойчивости движения*, Москва, Военно-Воздушная Инженерная Академия им. Н.Е.Жуковского, № 87, вып.1, стр. 5–29, 1946 г.
120. Гребеников Е.А., Тюрина И.А., Николай Дмитриевич Моисеев, 1902–1955, Из-во «Наука», Москва, 2007, 132 с.
121. Hill G., *Collected Works*, vol. 1, 1905, Washington.
122. Szebehely V., *Theory of orbits*, Academic Press, New york and London, 1967.
123. Хаусдорф Ф., *Теория множеств*, «Физматгиз», М.–Л., 1937 г., 320 с.
124. Гребеников Е.А., Рябов Ю.А., *Новые качественные методы в небесной механике*, «Наука», Гл. редакция физико-математической литературы, Москва, 1971, 444 с.
125. Гребеников Е.А., Рябов Ю.А., *Конструктивные методы анализа нелинейных систем*, «Наука», Гл. ред. Физико-математической литературы, Москва, 1979, 432 с.
126. Гребеников Е.А., *Метод усреднения в прикладных задачах*, – М.: «Наука», Гл. ред. физ.-мат. л-ры, 1986, 256 с.
127. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., *Методы ускоренной сходимости в нелинейной механике*, «Наукова Думка», 1971.
128. Арнольд В.И., *Успехи математических наук*, **18**, вып.6 (114), 91, 1963.

129. Вулих Б.З., Краткий курс теории функций вещественной переменной, – М.: Наука, 1973, 352 с.
130. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А., Нестационарные структуры и диффузионный хаос, – М.: Наука, 1992.
131. Дж. Трауб, Итерационные методы решения уравнений, – М.: МИР, 1985.
132. Н.Я. Виленкин, Метод последовательных приближений, – М.: Физматгиз, 1968.
133. Hill G., Amer.J.Math., 1, 1878.
134. Sundman K.F., Acta. Math. **36**, 105, 1912.
135. Beloritzky D., J. Observ. **16**, 109-132, 149-172, 189-211, 1933.
136. Кунцевич И.М., Олехнович Н.М., Шелег А.У., Таблицы тригонометрических функций, – М.: Физматгиз, 1967.
137. Субботин М.Ф., Введение в теоретическую астрономию, «Наука», 1968.
138. Чандрасекар С., Принципы звездной динамики, ИЛ, 1948.
139. Арнольд В.И., ДАН СССР, т. 137, 2, с. 255, 1961.
140. Арнольд В.И., Успехи Математических Наук, **18**, выпуск 6 (144), 91, 1963.
141. Леонтович А.М., Доклады АН СССР, **143**, 3, 525, 1962.